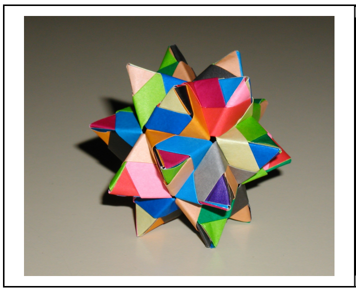
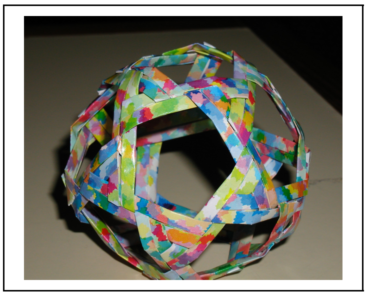




T.Otero

Xeometría con papel

XEOMETRÍA CON PAPEL

Mª Teresa Otero Suárez

Escoito e esquenzo
Vexo e recordo
Fago e comprendo

Proverbio chino

Ös meus amigos papiroflécticos, por tantas horas que pasamos xuntos intercambiando as nosas experiencias:
Ana, Alicia, Cova, Esther, Mariluz, Tere, e tódolos demáis do grupo

Proxecto elaborado por Mª Teresa Otero Suárez, con motivo da licencia desfrutada dende o 15 de Janeiro ata o 15 de maio de 2005.

O traballo exposto pretende dar unha pequena guía sobre o uso da papiroflexia na secundaria, como axuda para introducir ós alumnos no estudo da xeometría.

As conclusións que obtiven despois destes meses elaborando este pequeño texto é que os rapaces deberían comenzar a manipulación do papel, é decir empezar coa papiroflexia a partir dos 6 ou 7 anos para que vaian collendo destrezas e aprendendo os códigos da papiroflexiapara que asi o chegar á secundaria non se teña que partir de cero. Tiven algunha experiencia de talleres con cativos de 5 e 6 anos e realmente é impresionante o grado de creatividade que teñeñ e con que facilidade adquiren visión espacial.

INTRODUCCIÓN

BREVES APUNTES HISTÓRICOS

Papiroflexia é unha palabra de orixe latina que deriva de papiro-papel e flectere-doblar . A papiroflexia ou origami ten unha historia milenaria que se funde coa tradición e a cultura xaponesa, a papiroflexia permítenos unha conexión entre o cerebro a man e o ollo de aí a súa importancia na aprendizaxe das matemáticas.

É unha arte precisa na que se fan coincidir bordes e se efectúan dobreces para crear figuras de todo tipo dende as máis sinxelas ata outras de gran beleza e perfección.

O papel aparece en China no ano 105 d.c. por Tsai Lun, logo no século VI foi levado ó Xapón e Marco Polo no século XIII tróuxoo a Europa e foron os árabes os que o intruduciron en España.

A PAPIROFLEXIA NA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

A papiroflexia é de gran axuda na educación xa que:

- Lle dá ó profesor unha ferramenta pedagóxica que lle permite desenvolver contidos conceptuais e procedementais, tamén desenvolve habilidades motoras finas e grosas que lle permitirán ó alumno desenvolver outros aspectos como lateralidade, percepción espacial e a psicomotricidade.

- Desenvolve a destreza manual e a exactitude no traballo

- Motiva ó alumno a ser creativo
- A papiroflexia é un exemplo de "Aprendizaxe esquemática" a través da repetición de accións. O alumno debe observar e escoitar atentamente as intrucións para poñelas en práctica.
- A través do plegado os alumnos usan as mans para seguir as instrucións paso a paso e de forma ordenada para lograr un bo resultado, según Piaget "A actividade motora na forma de movementos coordinados é vital para o desenvolvemento do pensamento intutivo e na representación mental do espazo"
- Para o matemático a beleza da papiroflexia está na súa xeometría, en cada trozo de papel hai patróns xeométricos, combinacións de ángulos e rectas que lle permiten ó cadrado de papel chegar a ter variadas e interesantes formas.
- Usando a papiroflexia conseguimos plantar e alimentar as sementes do pensamento xeométrico. A papiroflexia proporciona un acoplamento e un ambiente de motivación dentro do cal os alumnos amplían as súas experiencias e enerxías xeométricas da visualización espacial.

• MODELO VAN HIELE

O modelo de razonamento de Van Hiele é unha teoría de desenvolvemento intelectual baseada na experiencia dos seus autores como profesores de xeometría, que a fai idónea para ista parte das matemáticas.

Iste modelo trata de describir as formas de razoamento habituais nos estudantes de xeometría. Os esposos Van Hiele profesores de matemáticas de secundaria en Holanda, a partir da súa experiencia docente elaboraron un modelo na súa tese doutoral que trata de explicar, por unha parte como se produce a evolución do razoamento xeométrico dos alumnos e por outra banda como se pode axudar ós alumnos a mellorar a súa capacidade de razoamento. Este modelo introdúcenno en Rusia no seu sistema educativo (no ano 1964). En Europa a excepción de Holanda séguese ignorando este modelo e é no ano 1974 cando o profesor I. Wirszup nun artigo para a reunión da asociación nacional de profesores de matemáticas fai unha descrición do currículum soviético e alerta ós profesores de Estados Unidos dicindo que o currículum soviético na xeometría é máis eficaz ca o seu, pois os alumnos aprenden máis e mellor. De aí que o modelo Van Hiele é obxecto de interese en todo o mundo.

Este modelo consta de dúas partes:

Na primeira describe os distintos tipos de razonamento dos estudantes ó longo da súa formación matemática, que abarca dende o razoamento intuitivo ata o formal ou abstracto (os cinco niveis de razoamento); na segunda parte describe cómo pode un profesor de matemáticas organizar a actividade nas súas clases para que os alumnos sexan capaces de acceder a un nivel superior de razoamento.

NIVEL 1 (RECOÑECEMENTO): O alumno neste nivel:

- Percibe os obxectos na súa totalidade
- Descríbeos polo seu aspecto físico e clasifícaos d de acordo con semellanzas ou diferenzas físicas entre eles.
- Non recoñece explicitamente as propiedades.

NIVEL 2 (ANALISE) Neste nivel o alumno:

- Percibe os obxectos como formados por partes e dotados de propiedades aínda que non identifica relacións entre elas
- Describe os obxectos de forma informal, non fai aínda clasificacions lóxicas
- Deduce propiedades a partir das manipulacións e experiencias

NIVEL 3 (CLASIFICACIÓN) Neste nivel o rapaz

- Fai clasificacións lóxicas en base a propiedades coñecidas
- Comprende os pasos individuais dun razoamento lóxico de forma llada, non entende aínda a estructura dunha demostración.
- Describe as figuras intentando dar unha definición formal

NIVEL 4 (DEDUCCIÓN) Neste nivel o alumno:

- É capaz de realizar razoamentos lóxicos formais
- Comprende a estructura axiomática das matemáticas

NIVEL 5 (RIGOR) Nestenivel

- Acepta a existencia de sistemas axiomáticos distintos analízaos e fai comparacións
- Atópase no máximo nivel de rigor matemático´

Este último nivel non se acada na secundaria nin no bacharelato.

Estes niveis están dotados de diversas propiedades nas que se amosan as liñas básicas que debe seguir o profesor:

Recursividade:

Os elementos implícitos nun nivel fanse explícitos no nivel superior. Por ejemplo, un neno pequeño diferencia as figuras pola súa forma: cadrado, triángulo, aínda que non é consciente que esta forma depende dos vértices para a súa clasificación, cousa que terá clara no seguinte nivel. Podemos sintetizar esta característica:

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Propiedades dos obxectos	Propiedades dos obxectos
Nivel 2	Propiedades dos obxectos	Relacións entre as propiedades
Nivel 3	Relacións entre as propiedades	Dedución formal de relacións
Nivel 4	Dedución formal de relacións	Reglas básicas dun sistema axiomático
Nivel 5	Reglas básicas dun sistema axiomático	

Secuenciabilidade:

Non é posible alcanzar un nivel sen superar antes todos os niveis inferiores.

Aquí é preciso evidenciar un perigo que se deriva dunha aprendizaxe memorística:

Un estudante pode aparentar un nivel superior do que realmente ten por ter aprendido procedementos rutinarios propios dun nivel superior aínda que non os comprenda. (pode aprender memorísticamente demostracións formais mecánicas propias dunha linguaxe matemática formal e malia todo estar moi lonxe deste tipo de razoamento.

Especificidade na linguaxe:

Cada nivel leva asociado un tipo de linguaxe para comunicarse, de forma que as persoas que usen linguaxes de distintos niveis non poderan entenderse. Con isto Van Hiele dinos que se queremos que os nosos alumnos nos entendan e aprendan, debemos poñernos no seu nivel, en vez de pretender que sexan eles os que se poñan no noso nivel.

Continuidade:

O paso dun nivel ó seguinte prodúcese de forma pausada, podendo ser de horas ou días para os niveis 1 e 2, pero lento, meses ou anos para os niveis 3 e 4.

Os Van Hiele propoñen unha sucesión de cinco fases de aprendizaxe para levar a un estudante dende un nivel de pensamento ó seguinte . Basicamente estas cinco fases constitúen un esquema para organizar o ensino.

Fase 1 (Información): O estudante aprende a recoñecer o campo de investigación no que vai traballar por medio do material que lle presenta o profesor. A manipulación deste material permitiralle descubrir unha certa estrutura. Esta fase serve tamén para que o profesor averigüe os coñecementos mínimos dos rapaces sobre o tema que se vai abordar.

Fase 2 (Orientación dirixida): O estudante explora o campo de investigación por medio do material. O rapaz sabe en que dirección vai o estudo pois a súa investigación sobre o material é guiada mediante cuestións ou directrices dadas polo profesor.

Fase 3 (Explicitación): As experiencias adquiridas únense a símbolos lingüísticos precisos e os estudantes aprenden a expresarse no transcurso de discusións sobre estas estruturas que teñen lugar na aula. O profesor procurará que nas discusión se emplee a terminoloxía usual. No transcurso da terceira fase é cando se forma parcialmente a nova rede de relacións.

Fase 4 (Orientación libre): Agora os alumnos aplican os seus novos coñecementos a investigacións sobre o material. O campo de investigación é en gran parte coñecido , pero o alumno aínda debe encontrar o seu camiño neste campo de investigación. Isto consíguese mediante a asignación polo profesor de tareas que se poidan desenvolver de formas distintas ou que poidan ter distintas solucións. No campo da investigación colocarase toda clase de indicios que amosen o camiño a seguir pero que o estudante deberá combinar adecuadamente.

Fase 5 (Integración) o alumno aínda debe adquirir unha visión xeral dos métodos que ten á súa disposición. Trata de condensar nun todo o dominio que explorou o seu pensamento. Neste intre o profesor pode fomentar este traballo proporcionando comprensións globais, pero é importante que estas comprensións non lle aporten ningunha novidade ó estudante, so debe ser unha acumulación de cousas que xa coñece.

Como resultado desta 5ª fase alcánzase un novo nivel de pensamento. O estudante adopta unha rede de relacións que conecta coa totalidade do dominio explorado. Iste novo dominio de pensamento, no que adquiriu a súa propia intuición, substitue ó dominio de pensamento anterior, o cal posuía unha intuición completamente diferente.

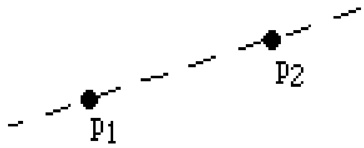
ELECCIÓN DUNHA METODOLOXÍA DE ENSINO

O modelo de Van Hiele propugna, polo menos para os tres primeiros niveis, un ensino eminentemente activo, baseado na manipulación polos estudantes de figuras e outros materiais didácticos e no descobremento de novos coñecementos a partir da súa actividade. Isto supón unha alternativa radicalmente oposta á tan frecuente dos alumnos escoitando o profesor ou lendo libros de texto para memorizar definicións e enunciados e realizar a continuación exercicios de afianzamento.

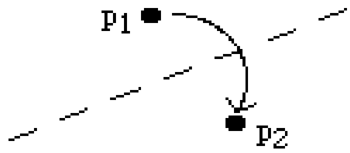
AXIOMAS DA PAPIROFLEXIA

No First International Mecting of Origami Science and Technology no ano 1989, o profesor Humiaki Huzita presentou un traballo no que establecía os axiomas dunha nova xeometría que el mesmo chamou xeometría do origami, que resolve problemas irresolubles con regra e compás na xeometría clásica, como son a duplicación do cubo e a trisección do ángulo.

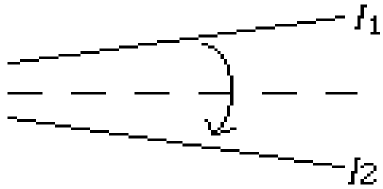
- Dados dous puntos p_1 y p_2, pódese facer unha pregua que os conecte.



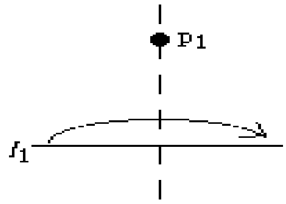
- Dados dous puntos p_1 y p_2, podemos pregar p_1 sobre p_2.



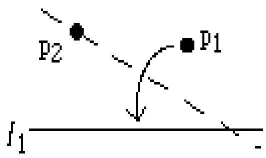
- Dadas dúas rectas l_1 y l_2, podemos pregar l_1 sobre l_2.



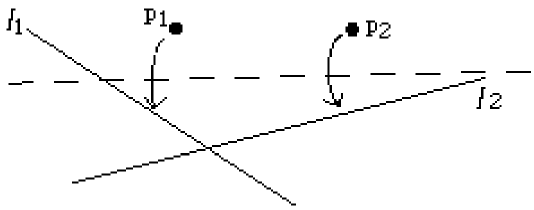
- Dado un punto p e unha recta l, podemos facer un prega perpendicular a l que pase por p.



- Dados dous puntos p1 y p2, e unha recta l, podemos facer un prega que faga corresponder p1 cun punto de l que pase por p2.



- Dados dous puntos p1 y p2, y dúas rectas l1 y l2, podemos facer un prega que faga corresponder p1 cun punto de l1 y p2 cun punto de l2.



OBXECTIVOS PARA OS ALUMNOS

Co desenvolvemento destas actividades pretendemos que os alumnos e alumnas adquiran as seguintes capacidades ou destrezas.

- Utilizar os seus conceptos matemáticos e a súa capacidade de razoamento nun ambiente próximo á vida cotiá para resolver problemas
- Comprender e usar a linguaxe xeométrica e a súa representación matemática, adecuada para describir formas, clasificalas e esquematizalas.
- Deseñar e manipular modelos materiais que favorezan a comprensión e a resolución de problemas, valorando a interrelación que hai entre a actividade intelectual e manual
- Realizar coidadosamente tarefas manuais e gráficas, deseñándoas e planificándoas previamente, valorando os aspectos estéticos, utilitarios e lúdicos do traballo manual ben feito.
- Recoñecer formas e realizar medidas no plano e no espazo, formulando e contrastando conxeturas sobre propiedades xeométricas e desenvolvendo a intuición espacial.
- Traballar en equipo para levar a cabo unha tarefa, sabendo confrontar as opinións propias cás dos compañeiros, aceptar as mellores solucións, valorando as ventaxas da cooperación

- Desenvolver a capacidade de descubrir e apreciar os compoñentes estéticos de obxectos e situacións, gozando cos aspectos creativos, manipulativos e utilitarios das matemáticas.
- Facer uso dos sistemas de proporcionalidade para o uso de construción de formas, creando e diseñando modelos xeométricos.
- Utilizar a composición, descomposición, intersección, movemento, deformación e desenvolvemento de elementos xeométricos para o seu uso ou obtención de outros novos.
- Valorar o uso da linguaxe xeométrica en situacións diferentes favorecendo a organización, interpretación e discusión de distintas situacións relativas á vida cotiá, abordandoas e revisándoas dende distintos ángulos, podendo logo utilizalas para formar criterios propios ou en tomas de decisións.

CONTIDOS:

- As figuras e os seus elementos (triángulos cadrados, pentágonos exágonos eixos de xeometría etc.)
- Estimación de medidas (ángulos, distancias...)
- Estudo das propiedades matemáticas involucradas e das propiedades dos polígonos

- Construción de poliedros regulares (sólidos platónicos)
- Estudo das propiedades matemáticas involucradas e das propiedades dos poliedros.
- Alguna construción mais complexa
- Paraboloide hiperbólico: estudo elemental de superficies regradas, como aplicación na arquitectura utilizada por arquitectos tan famosos coma Gaudí, Félix Candela etc.
- Puzzles e entretementos dos que logo se poidan deducir formulas, demostrar teoremas ou calcular áreas e volumes

ACTITUDES:

- Interese e gusto pola descrición precisa de situacións, orientacións e relacións espaciais usando a linguaxe xeométrica.
- Sensibilidade e gusto pola elaboración e presentación coidadosa de construcións xeométricas (o pracer de obter figuras coidadosamente feitas xorde inmediatamente, pois as primeiras non acostuman saír moi aceptables)
- Curiosidade e interese por identificar formas e relacións xeométricas nos obxectos do entorno (pensamento asociativo) recoñecer e buscar a

xeometría que nos rodea e como plasmala nas nosas figuras

- Interese e perseverancia na busca de solucións a situacións problemáticas relacionadas coa organización e o uso do espazo (algo inherente á papiroflexia é a busca de solucións ó problema que é formar a nosa figura para o cal hai que dar voltas, pensar e buscar o punto de vista adecuado a cada caso)

Construcións xeométricas dobrando papel

1. Liña que pasa por un punto: Marcamos un punto sobre o papel, mellor polos dous lados. Dobramos a folla e sen apretar facémola resbalar sobre sí mesma ata que no borde da insinuada dobrez vexamos aparecer o punto predibuxado. Entón marcamos con coidado a dobrez mantendo o punto nesta.
2. Liña que pasa por dous puntos: Trátase de conquerir que a dobrez pase simultáneamente por dous puntos previamente marcados. Non é un exercicio fácil, pellizcamos un pouco sobre cada punto estiramos o papel e marcamos a liña, mentres non esteamos afeitos, podemos facer un pouco de trampa que consiste en marcar cunha regra a liña cun boli sen tinta ou coa uña e logo dobrar pola marca.
3. Liña perpendicular a unha dada: Dobramos o papel pola liña dada e facemos unha nova dobrez que leve dita liña sobre ela mesma. A superposición de catro ángulos que

ó desdobrar conforman un ángulo de 360º confirma a perpendicularidade..

4. Liña perpendicular que pasa por un punto: No caso anterior, antes de marcar a última dobrez facemos resbalar a primera liña sobre ela mesma hasta que vexamos aparecer o punto na insinuada nova dobrez. Entón, mantendo a liña sobre ela mesma a modo de carril, apretamos mantendo o punto na dobrez.
5. Liña paralela a unha dada: Perpendicular a unha perpendicular.
6. Liña paralela a unha dada que pasa por un punto: A segunda perpendicular faise pasar polo punto.
7. Mediatriz e punto medio dun segmento: fanse coincidir os extremos do segmento, co que este se dobra sobre sí mesmo téndose unha perpendicular.
8. Figura simétrica (punto simétrico, liña simétrica) doutra respecto dunha liña: Dóbrase o papel pola liña dada e a figura descansa sobre a simétrica.
9. Bisectriz dun ángulo: Dóbrase o papel de forma que coincidan as liñas que forman o ángulo. (Tanto bisectrices coma mediatrices son de fácil construción).
10. Movemento de compás: Ó dobrar a folla cunha dobrez que pasa por un punto O, calquera outro punto A correspóndese na folla con outro punto A' de forma que OA = OA', o que pode ser visto coma un xiro de A con centro en O.

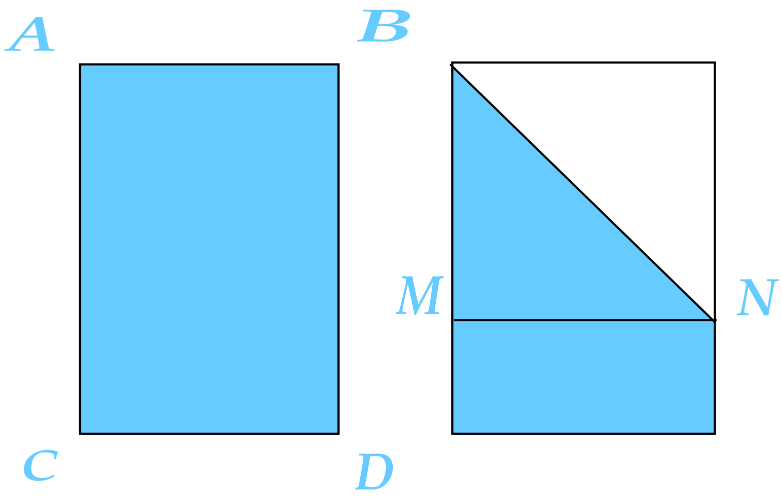
XEOMETRÍA PLANA

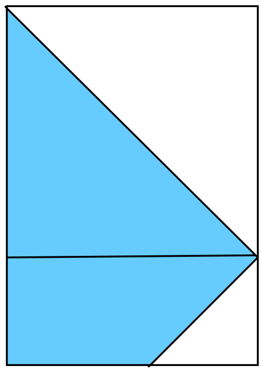
Neste apartado trataremos de traballar con polígonos, faremos triángulos, cadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, etc... e intentaremos facer con cada un algún obxecto que lle poida resultar atractivo, a miña idea segue a ser que os alumnos se vaian adentrando na xeometría de forma lúdica e a partir de aí investigar as propiedades, simetrías etc. dos polígonos e das figuras resultantes.

CADRADO

Para obter un cadrado podemos usar calquera pedazo de papel, teña ou non forma regular, empezaremos usando un papel de forma rectangular. Dado un rectángulo calquera para obter del un cadrado procedemos da seguinte maneira

Levamos o lado AB sobre o lado AC, a liña que marcamos recibe o nome de DIAGONAL do cadrado, se trazamos a liña MN e cortamos obtemos un cadrado, para marcar mellor a liña MN convén levar o lado DN sobre MN, se agora xuntamos as dúas diagonais o que estamos a facer é dobrar o lado MN.





Podemos prantexar ós alumnos as seguintes preguntas:

1.- ¿Cómo son os triángulos que se forman?

2.- Na última figura ¿teñen algunha relación eses dous triángulos brancos?

Se unha vez cortado o cadrado lles mandamos que marquen a outra diagonal do mesmo

3.- ¿Qué observas?

4.- ¿Qué che parece que é para o cadrado o punto de corte das diagonais?

5.- ¿Son da mesma lonxitude as dúas diagonais do cadrado?

6.- ¿Que ángulo forman entre sí?

Podemos coller outro rectángulo como o de partida e dobramos tamén as súas diagonais

Non é doado marcar as diagonais dun rectángulo facemolas dobreces en monte collendo polos dous vértices e logo aplastamos a diagonal.

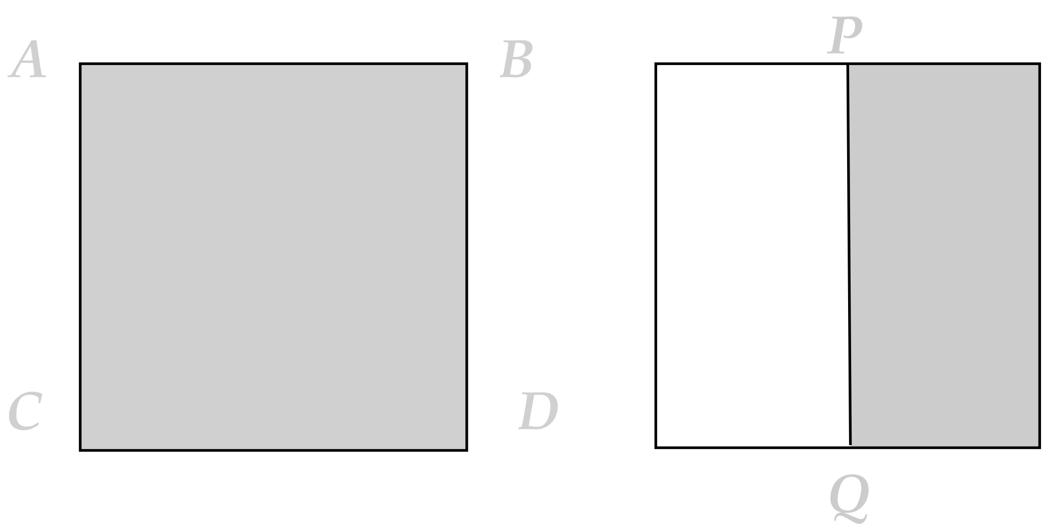
Observamos que tamén se cortan nun punto

7.- ¿Son da mesma lonxitude as dúas diagonais do rectángulo?

8.- ¿Que ángulo forman entre sí?

9.-Podemos dicir en que se diferencian os cadrados dos rectángulos

Seguimos co cadrado inicial nel temos marcadas as dúas diagonais, imos marcar agora unha metade; para iso levamos o lado AC sobre o lado BD



Queda o cadrado dividido en dúas partes iguais

10.- ¿Que relación ai entre a superficie do cadrado e a dos rectángulos?

11.- ¿Como é o segmento PQ en relación ós lados do cadrado?

Dobramos agora a outra metade

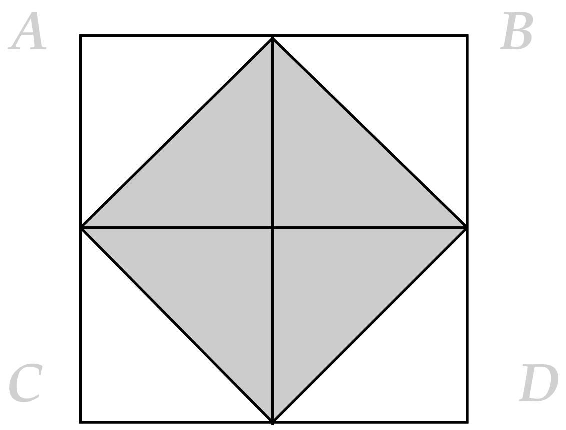
12 ¿Que clase de polígonos obtemos?

13 ¿Cal é a súa área en relación ca do cadrado de partida?

Se agora no cadrado levamos os catro vértices ó centro

14 ¿Que novo polígono marcamos?

15 ¿Que relación hay entre o cadrado orixinal e o que construímos agora?



Se unimos os puntos medios dos lados do cadrado interior, obtemos un cadrado máis pequeno cuxa área é a cuarta parte do cadrado orixinal.

Repitindo este proceso obtemos calquera número de cadrados, e as súas áreas son respectivamente a metade do anterior, isto é

1/2, 1/4, 1/8, etc.,

¿Que relación hai entre a suma das áreas da familia de cadrados que se constrúen seguindo o procedemento anterior?

Observamos que a suma das áreas que forman tódolos cadrados que se obteñen ó aplicar sucesivamente o proceso anterior increméntase pero non pode exceder á área do cadrado orixinal, pero estas áreas veñen dadas por

1/2+1/4+1/8+etc.~ =1

RECTÁNGULO FORMATO (DINA)

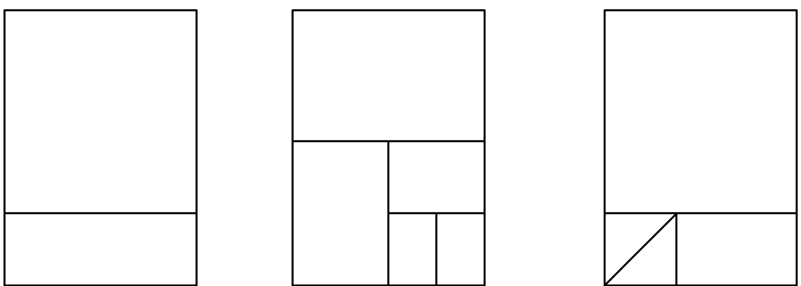
Os formatos coñecidos como A1, A2, A3, ... seguen a proporción: $\boxed{1:1,414}$ entre os seus lados curto e longo

Este formato DIN, que tamén recibe o nome de “silver rectangle” (rectángulo de plata), ten unhas propiedades xeométricas que o fan moi útil dende o punto de vista matemático e dende o punto de vista da papiroflexia.

1.- O lado máis grande ten unha lonxitude igual á diagonal dun cadrado construído sobre o lado máis pequeno

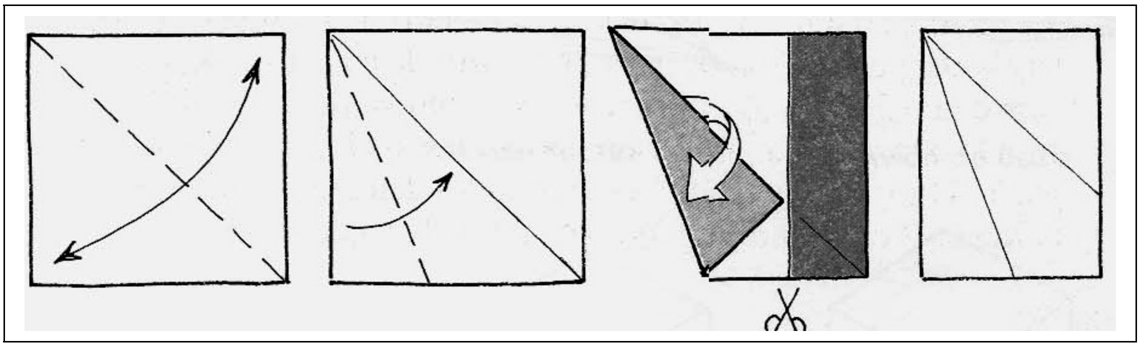
2.- A mediana do lado máis grande divide ó rectángulo noutros dous cuxos lados teñen a mesma proporción cós do primeiro. A regra aplícase ata o infinito se seguimos dividindo os rectángulos que se van obtendo.

3.- Se quitamos do rectángulo o cadrado construído sobre o lado máis pequeno, e quitamos tamén o cadrado construído sobre o lado máis pequeno do rectángulo que quedou, obtemos ó final un rectángulo coas proporcións iniciais.

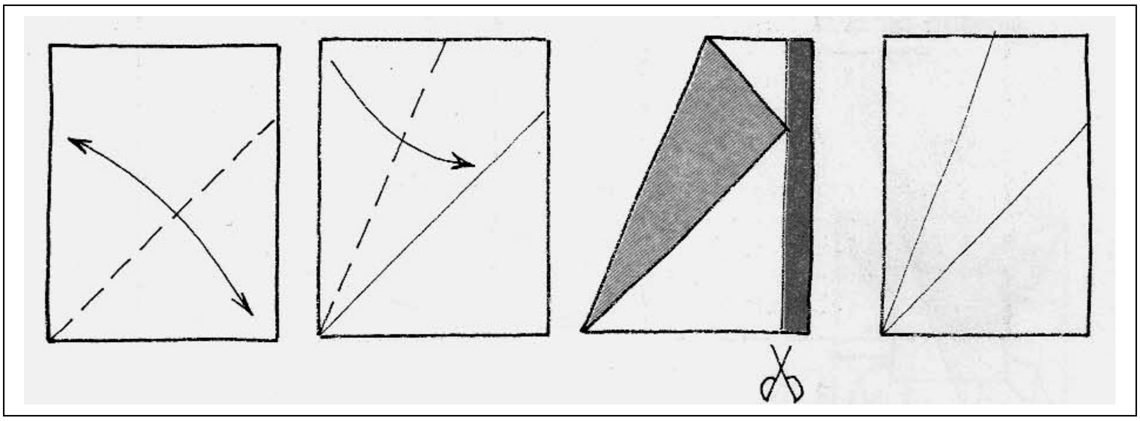


COMO OBTER UN RECTÁNGULO FORMATO DINA

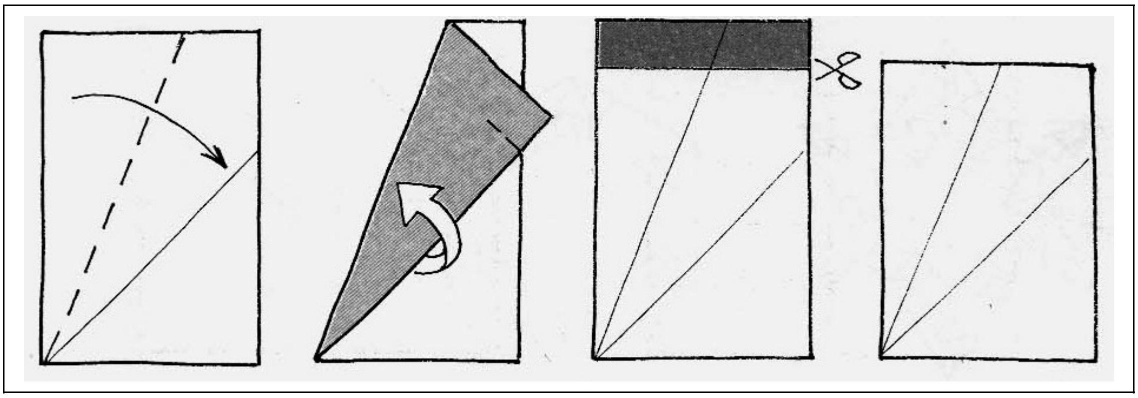
A partir dun cadrado:



A partir dun rectángulo (1):



A partir dun rectángulo (2):

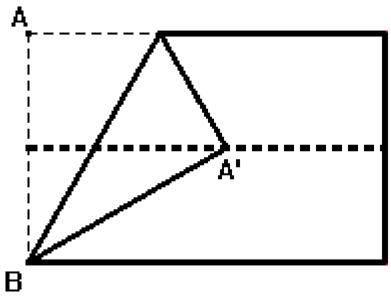


TRIÁNGULO EQUILÁTERO:

Vexamos como se constrúe un triángulo equilátero partindo dun rectángulo DINA

1.- Dobramos o rectángulo ó longo

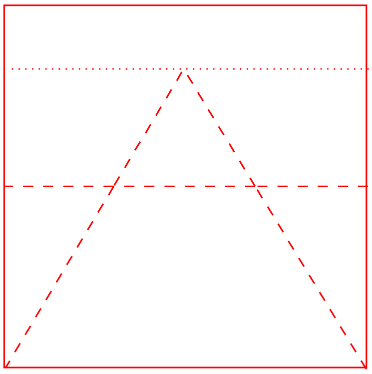
2.- Pivotando nun vértice, levamos o vértice adxacente correspondente ó lado pequeno, de tal xeito que toque a liña media marcada no paso 1



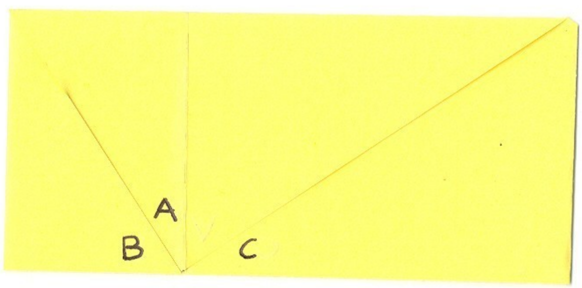
3.- Sen desdobrar dobramos sobre o lado curto e desdobramos, obtemos asi un triángulo equilátero.

Para obter o triángulo equilátero a partir dun cadrado procedemos da seguinte maneira:

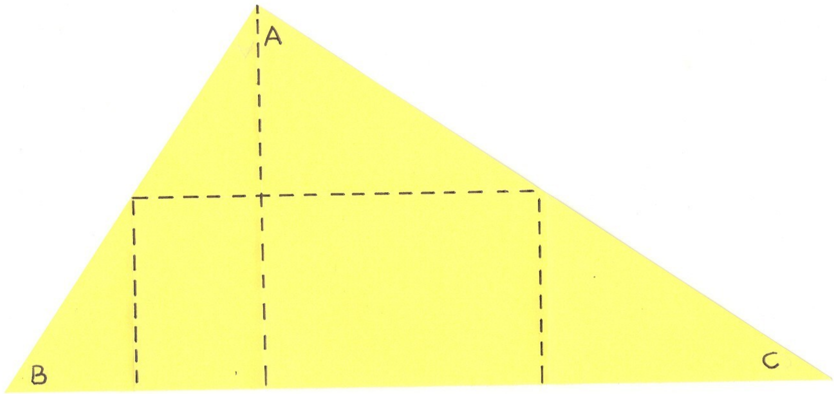
Marcamos unha das metades, poñendo a liña marcada en posición horizontal pivotamos nun dos vértices inferiores e levamos o vértice que está encima del sobre a líña marcada, desdobramos e repetimos o mesmo co outro vértice inferior, obtemos así o triángulo equilátero maior que se pode obter dun cadrado.



Marquemos nun cadrado un triángulo acutángulo calquera. Apoiámolo sobre o lado máis longo e trazamos a altura. Para iso temos que facer unha dobrez que pase polo vértice oposto e forme coa base un ángulo recto. Pellizcamos no vértice e tratamos de que na base do triángulo coincidan os dous papeis; levamos agora o vértice ó punto de intersección da altura coa base, levamos tamén os outros dous vértices a este mesmo punto, obtendo así un rectángulo que ´ten de área a metade da do triángulo de partida, como a área do rectangulo é base por altura, a área do triángulo será o dobre, é dicir



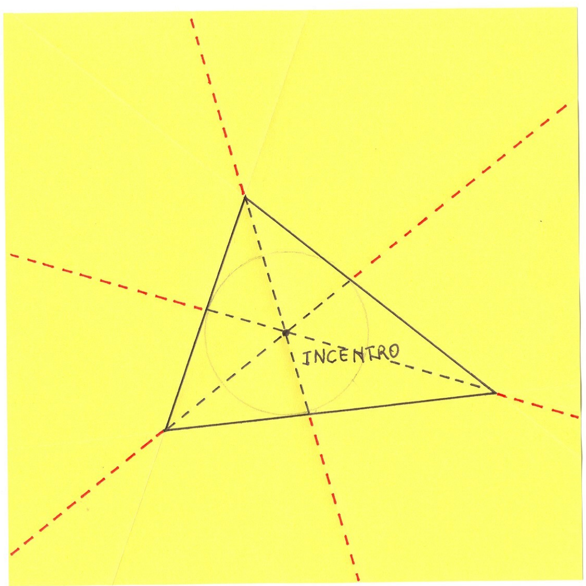
Observamos que a suma dos ángulos do triángulo é de 180º



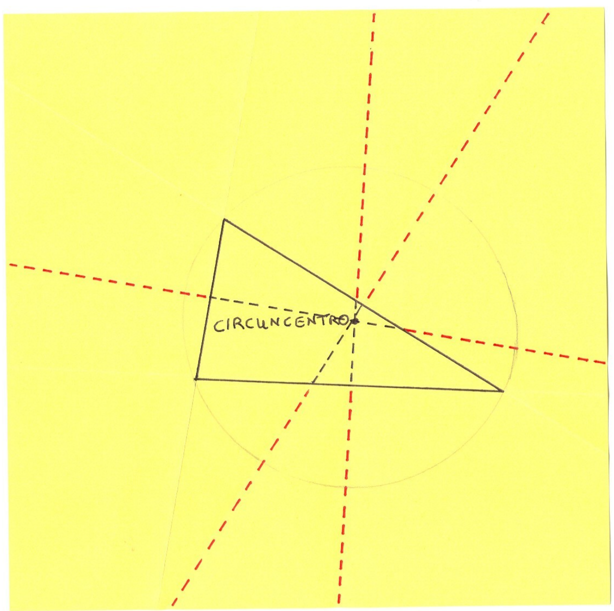
Área do triángulo = 2 x base del rec tángulo x altura del rectángulo =

½ base triángulo x altura do triángulo.

Facemos noutro cadrado outro triángulo acutángulo e marcamos nel as bisetrices superpoñemos os lados dous a dous, observamos que se cortan nun punto chamado INCENTRO observamos que a distancia diste punto ós lados do triángulo é a mesma polo que é o centro dunha circunferencia inscrita ó triángulo

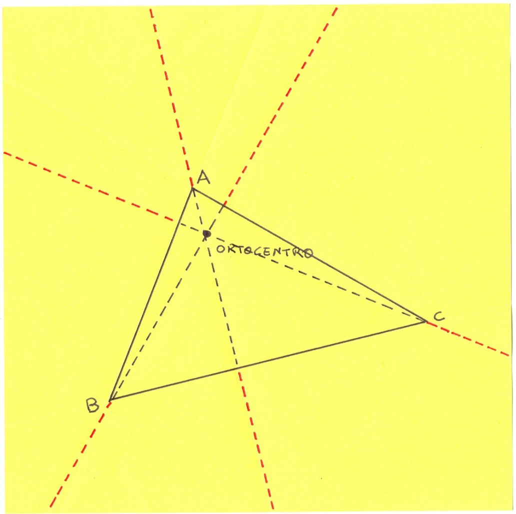


Facemos un triángulo acutángulo calquera dentro dun papel cadrado (valería en calquer papel máis grande); marcamos nel as mediatrices que son rectas perpendiculares ós lados do triángulo polo punto medio; para iso levamos un vértice sobre outro e marcamos obtendo así a mediatriz do segmento que une os dous vértices; obsérvase que se cortan nun punto que chamamos CIRCUNCENTRO, comprobamos a propiedade da mediatriz que calquera dos seus puntos equidista dos vértices, podedes estudiar porque efectivamente as tres mediatrices teñen que pasar por un mesmo punto, vemos entón que a distancia do circuncentro ós tres vértices é a mesma polo que é o centro dunha circunferencia que circunscribe o triángulo.

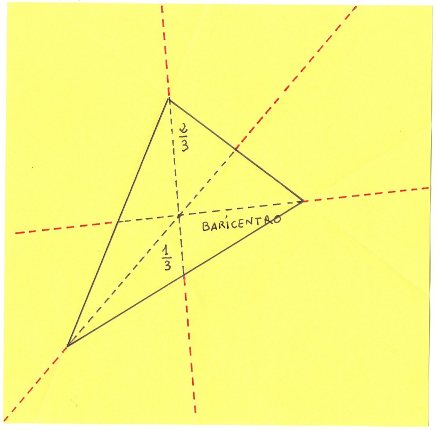


Collamos agora outro cadrado calquera e fagamos tres dobleces de tal xeito que quede marcado un triángulo acutángulo calquera.

Marcamos as tres alturas e comprobamos que se cortan nun punto chamado ORTOCENTRO, ¿Por qué teñen que pasar as tres polo mesmo punto?. Se trazamos por cada vértice do noso triángulo unha recta paralela ó lado oposto obtemos un triángulo máis grande no que observamos que as alturas do noso triángulo coinciden coas mediatrices do triángulo grande que se cortan no mesmo punto que as alturas do pequeño.



Por último volvemos marcar outro triángulo acutángulo nun cadrado e imos marcar as medianas que son liñas que pasan polo vértice e polo punto medio do lado oposto; para iso primeiro unimos dous vértices e facemos un pequeño pellizco para marca-lo punto medio. Logo marcamos a recta que pasa por este punto e polo vértice oposto; ó marcar as tres medianas tamén se observa que se cortan nun punto chamado BARICENTRO, que é o centro de gravidade do triángulo; se recortas o triángulo e colocas un lápis



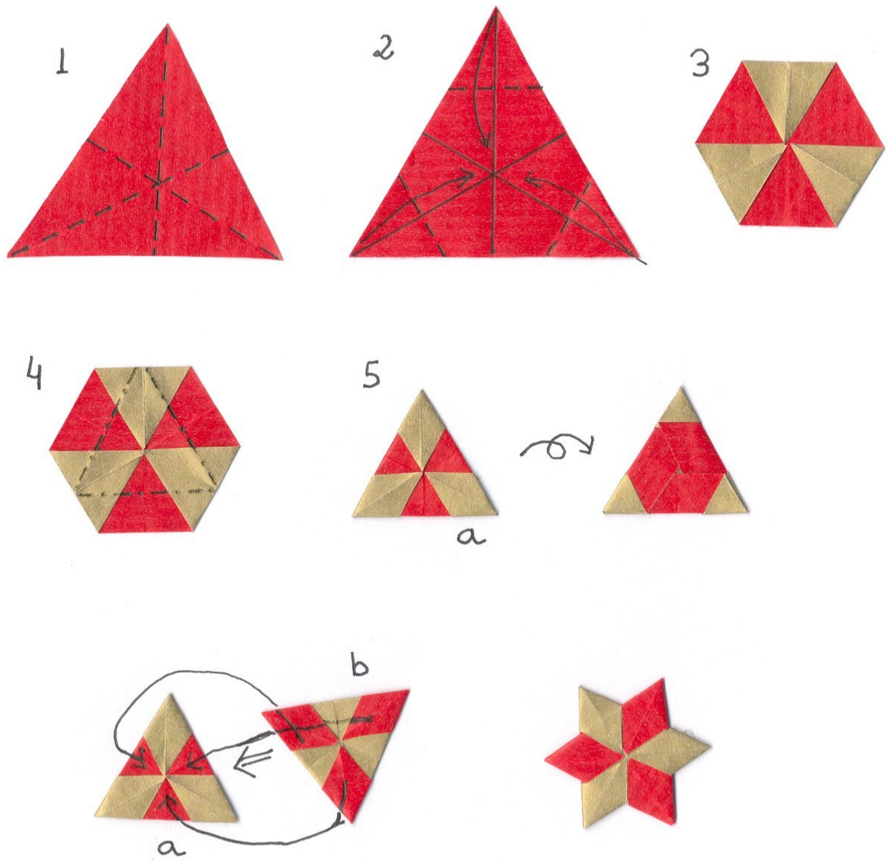
vertical coa punta hacia arriba e colocas o triángulo sobre a punta do lápis, tes que poñer exactamente o baricentro sobre a punta do lápis, ¡o triángulo queda en equilibro, iste punto é o único con ista propiedade, tamén podemos comprobar outra propiedade diste punto e é que se atopa a 1/3 da base e a 2/3 do vértice, mediante dobleces podemos ver que o segmento que vai dende a base ó baricentro é a metade do que vai do baricentro ó vértice.

Un exercicio interesante é facer agora un triángulo obtusángulo e obter tamén os puntos anteriores obtendo que non sempre son interiores ó triángulo.

Outro ejercicio tamén interesante é marcar tódalas rectas notables nun mesmo triángulo e observamos que o ortocentro, baricentro e circuncentro están alineados e dicir, están sobre a mesma recta, chamada recta de EULER, que foi quen descubriu esta alineación.

Volvendo ó triángulo equilátero, observamos nel que estes 4 puntos coinciden. Se levamos os vértices ó centro obtemos o hexágono regular.

Con dous triángulos equiláteros podemos facer a seguinte estrela.

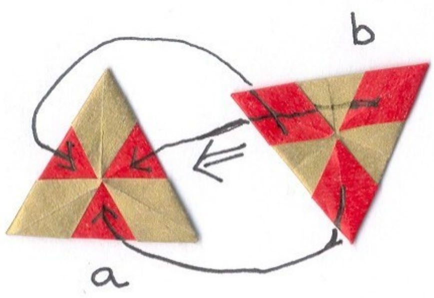


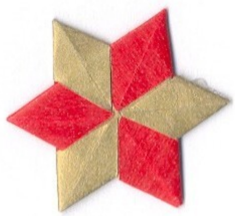
1 Trazanse as bisectrices, medianas, alturas e mediatrices do triángulo (prega en valle) que por tratarse dun triángulo equilátero coinciden. A súa intersección danos o incentro, baricento, ortocentro e circuncentro (mesmo punto).

2 Ó dobrar (valle) as puntas ó centro obtemos un hexágono (3)

Montaxe:

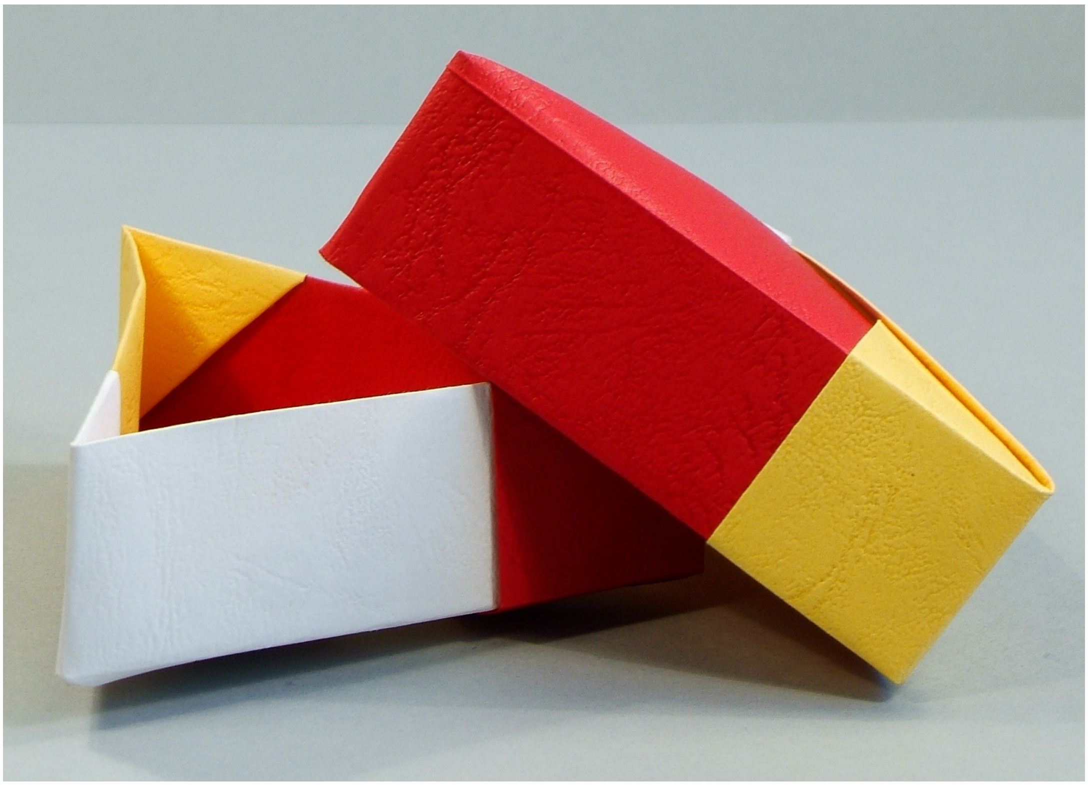
Construimos outra peza igual e as superpoñemos. Trabamos polas solapas obtidas para conseguir unha estrela de 6 puntas.

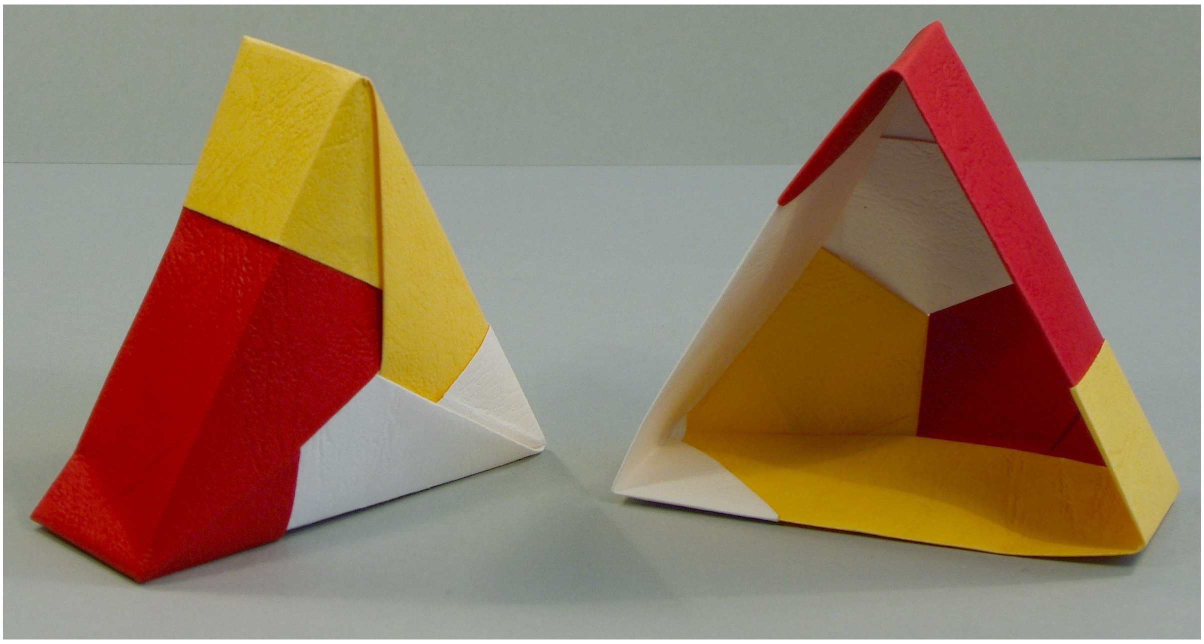




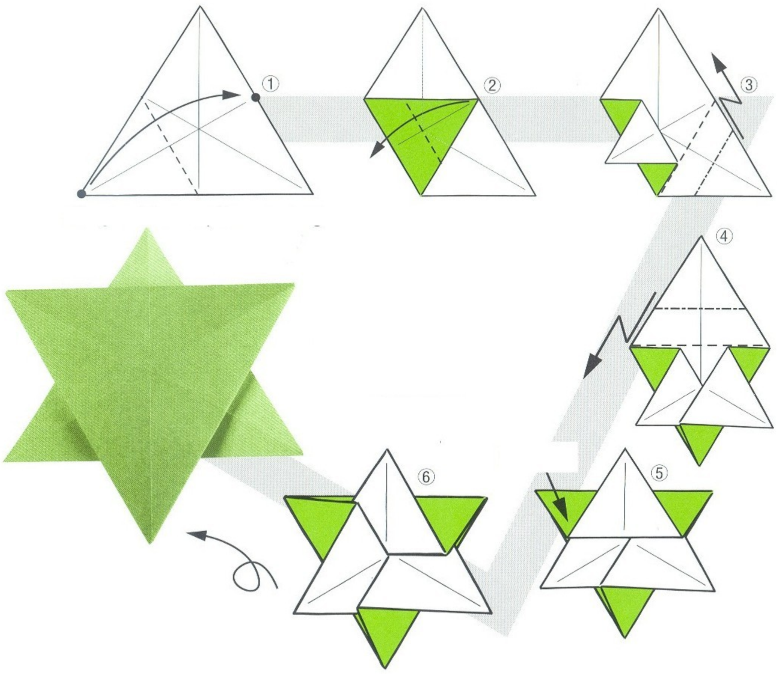
Se facemos as pezas de dúas cores distintas obtemos unha estrela con tres puntas de cada cor.

Tamén como aplicación do triángulo equilátero tamén podemos facer unha caixa triangular, a súa autora é Tomoko Fuse



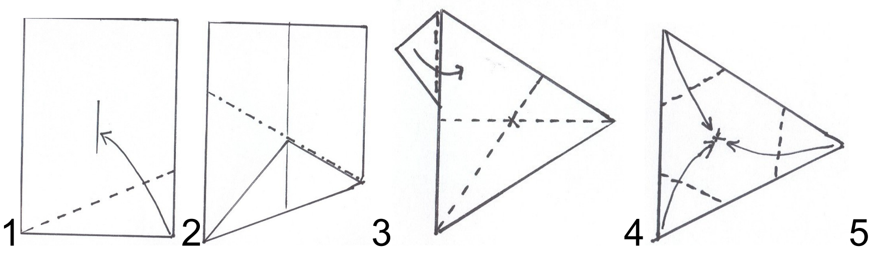


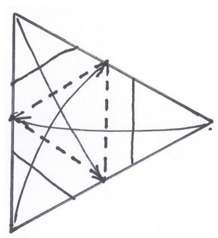
ESTRELA



CAIXA TRONCO DE PIRÁMIDE

Tamaño do papel: formato DINA





1- Contruímos o ángulo de 60º

2- Triángulo equilátero

3- Marcamos o baricentro

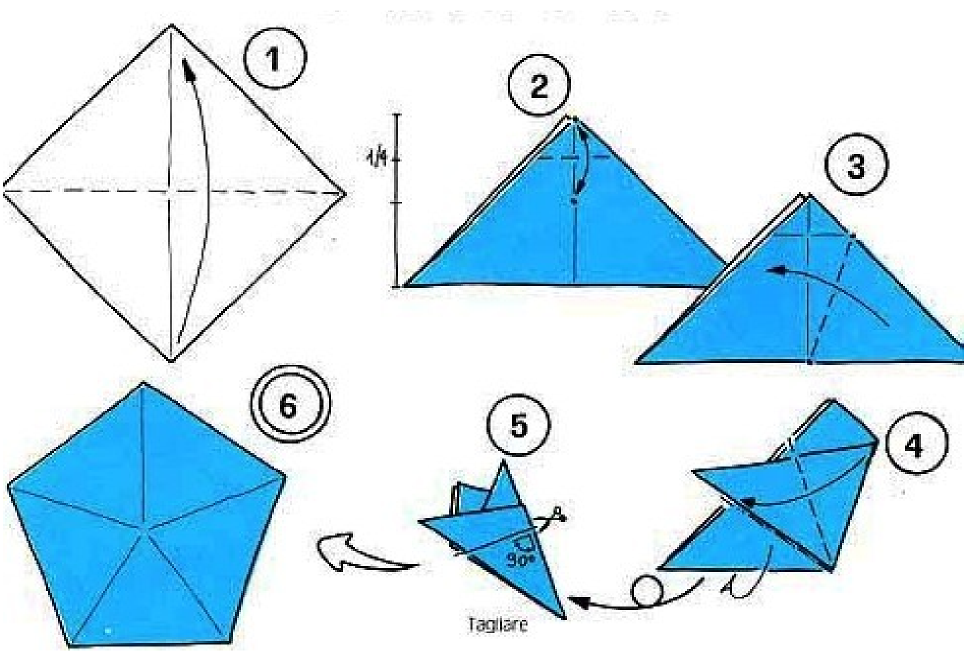
4- Dóbranse os vértices do triángulo ó centro. Desdóbranse

5- Lévase cada vértice ó punto medio do lado oposto

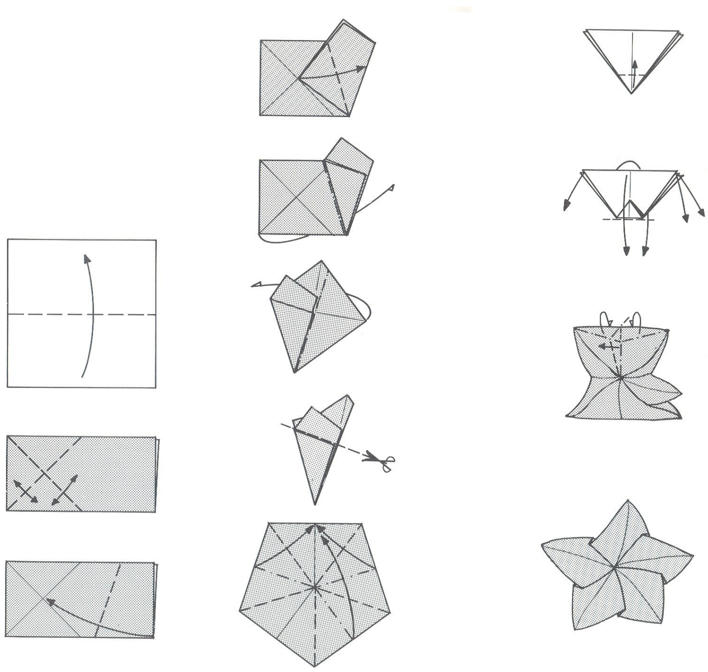
Dáse volume á caixa que queda convertida nun tronco de pirámide. Nunha das esquinas do triángulo aparecen 2 “bolsillos” nos que se introducirán as outras dúas esquinas quedando desta manera perfectamente trabada a caixa.

PENTÁGONO, HEXÁGONO, OCTÓGONO.
APLICACIÓNS

PENTÁGONO:



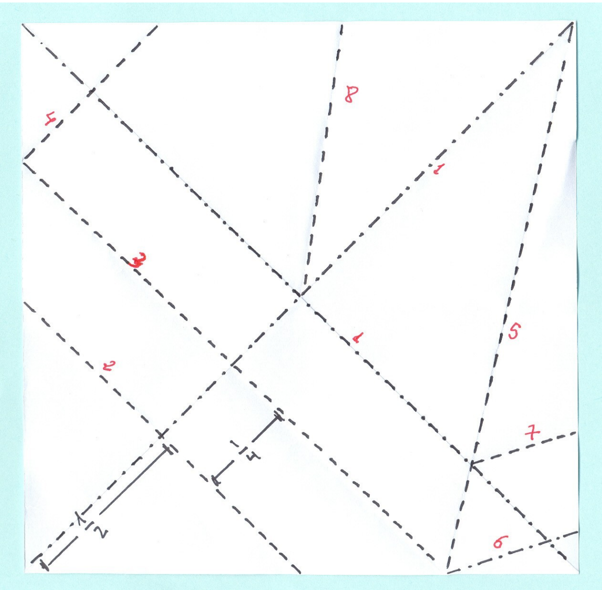
Podemos usar este pentágono e facer unha flor :



Para reforzar o concepto de polígono, neste caso pentágono e hexágono resulta muy motivadora a construción de caixas das distintas formas que se estudan. As dobreces precisas para conseguir o ángulo adecuado en cada caso lévanos a un interesante estudo e a un campo para a investigación por parte do alumno de como conseguir o obxectivo que se pretende. Vexamos a continuación distintos exemplos de caixas de distintas formas.

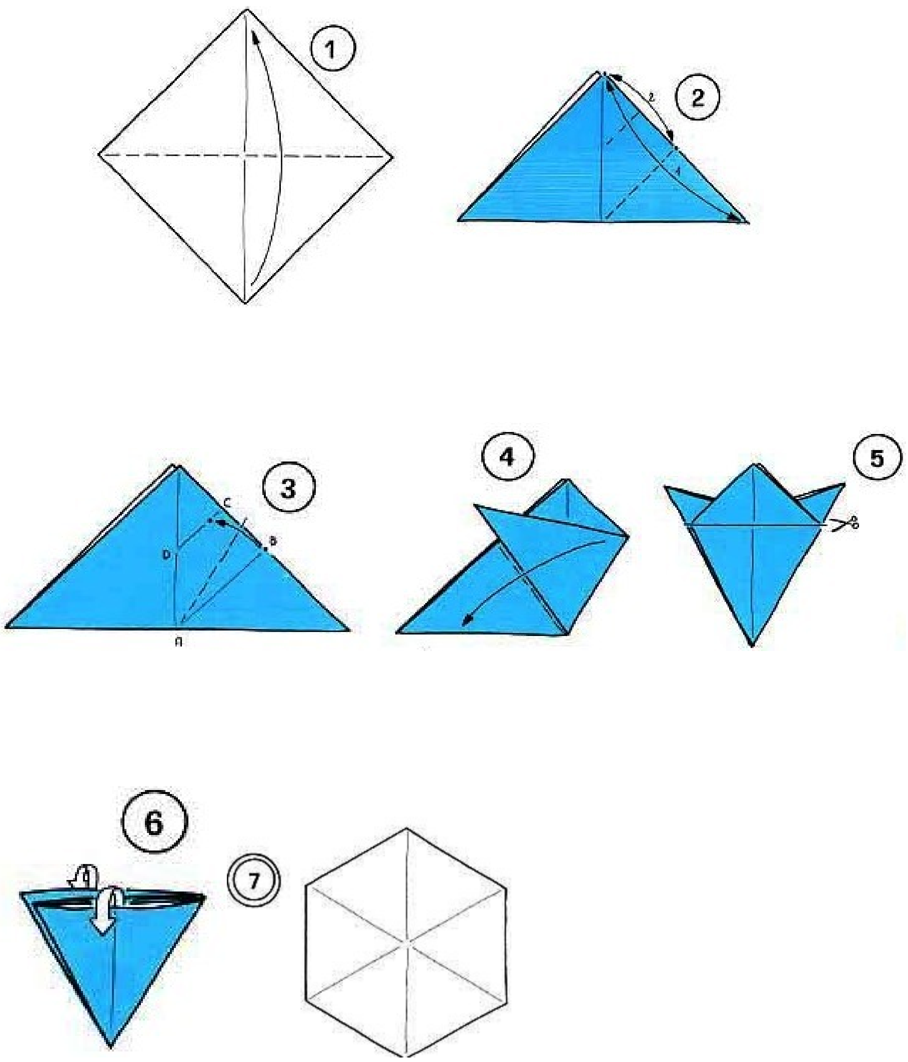
CAIXA PENTAGONAL:

Mapa de cicatrices.

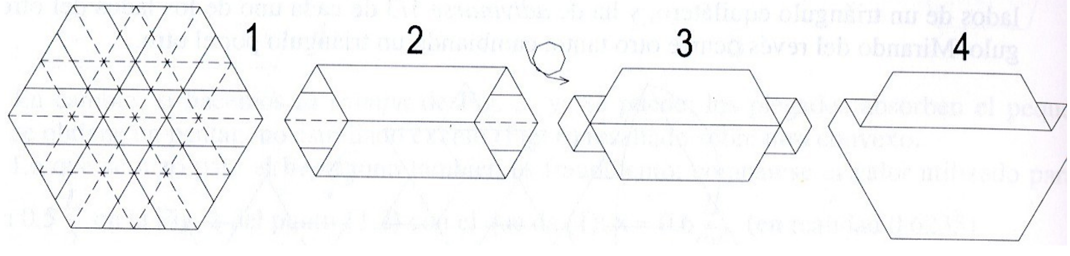


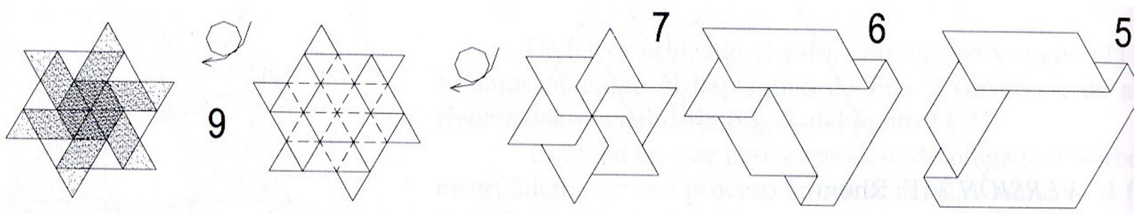
Precisanse 5 módulos iguais para a base e outros 5 para a tapa. Se facemos os módulos con papeis cun mesmo debuxo obtemos un efecto moi interesante

HEXÁGONO:

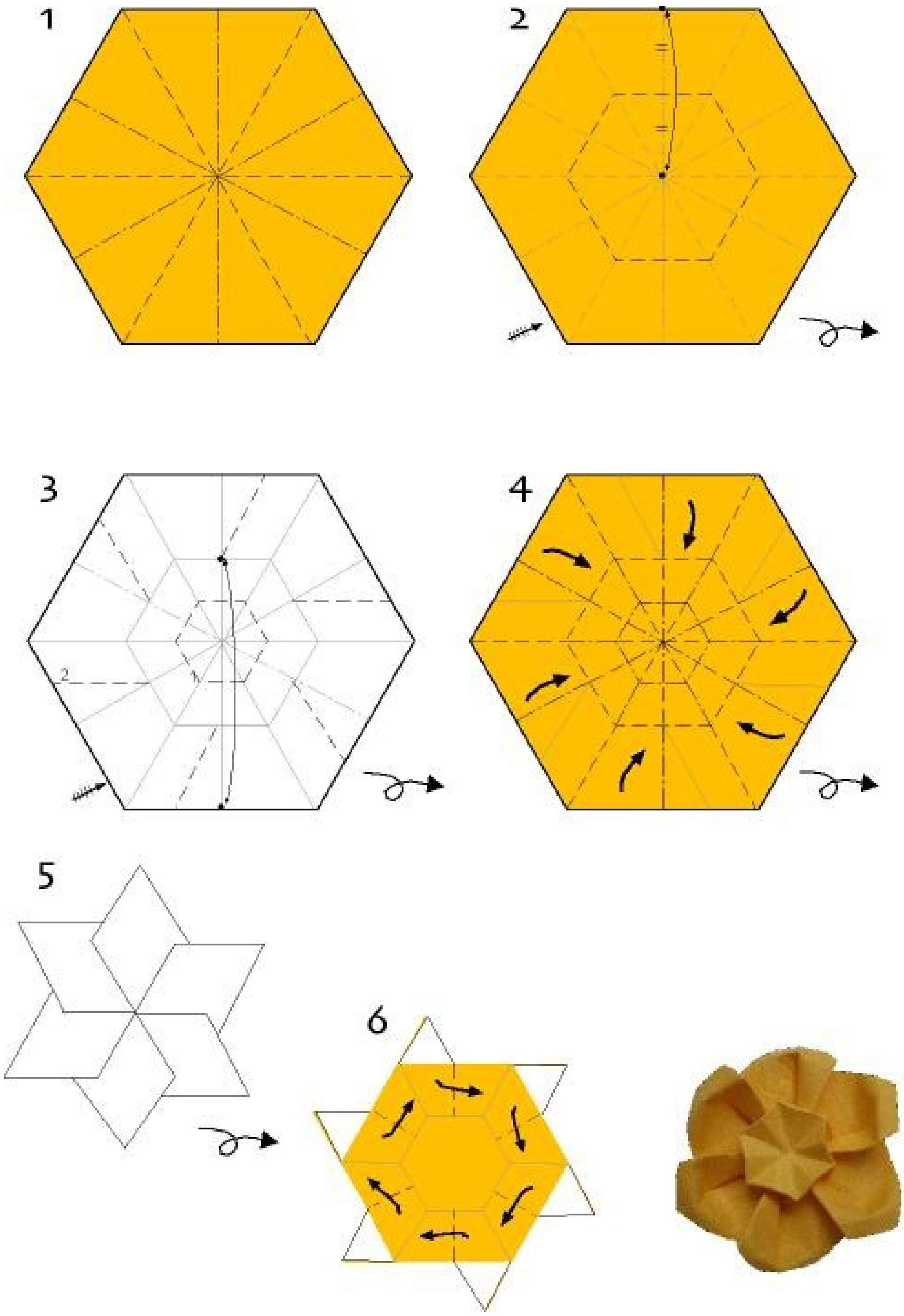


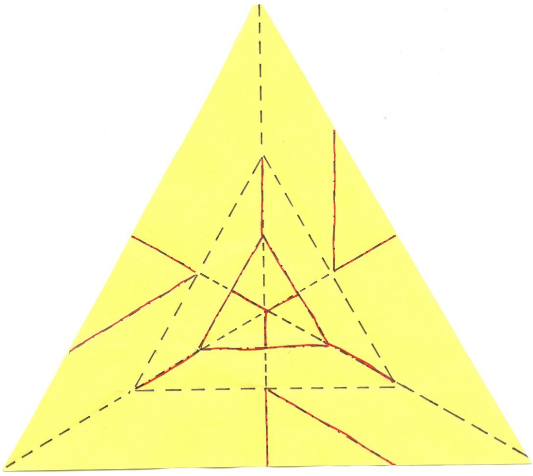
CRISTAL DE XEO

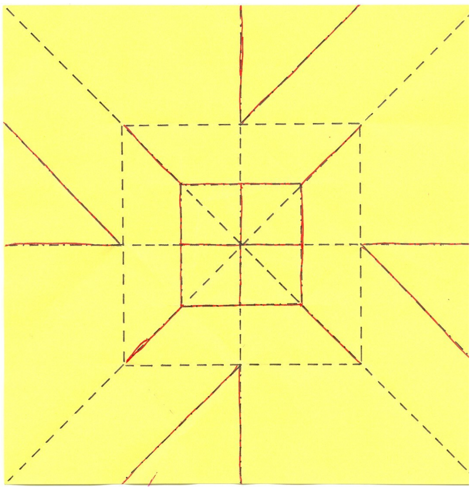


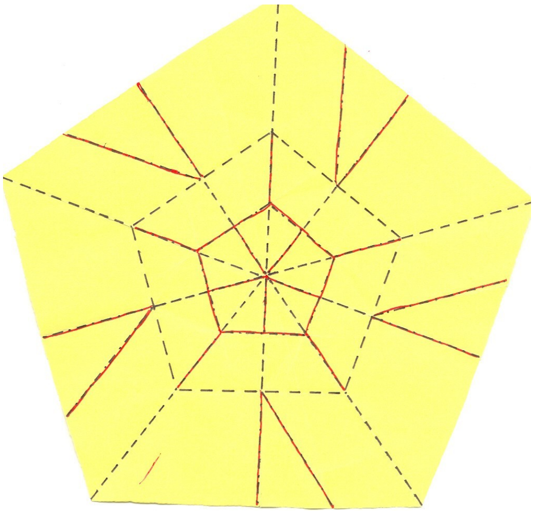


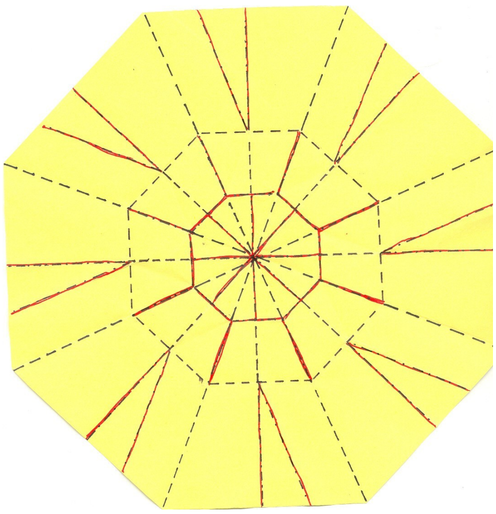
A partir do cristal de xeo e cando intentabamos facer figuras cos distintos polígonos que lle resultaran interesantes ós alumnos xurde a idea desta flor hexagonal que queda moi bonita para facer un pin ou un broche, a partir dela xeneralizouse para tódolos polígonos con pequenas variacións, triángulos, cadrados, etc, ata dodecágonos, a partir de aí podería seguirse pero os polígonos centrais en papeis de pequenas dimensións quedan pouco marcados e parecen círculos


1
2
3
4
5
6

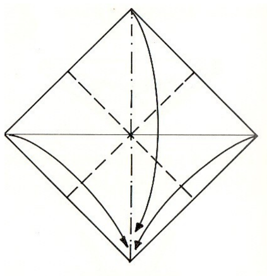
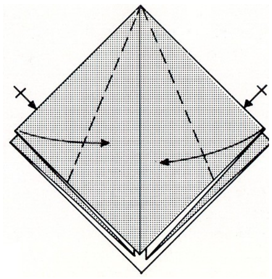
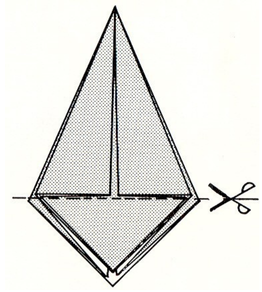


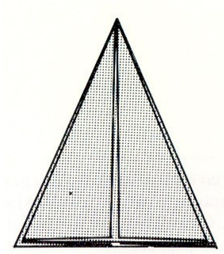






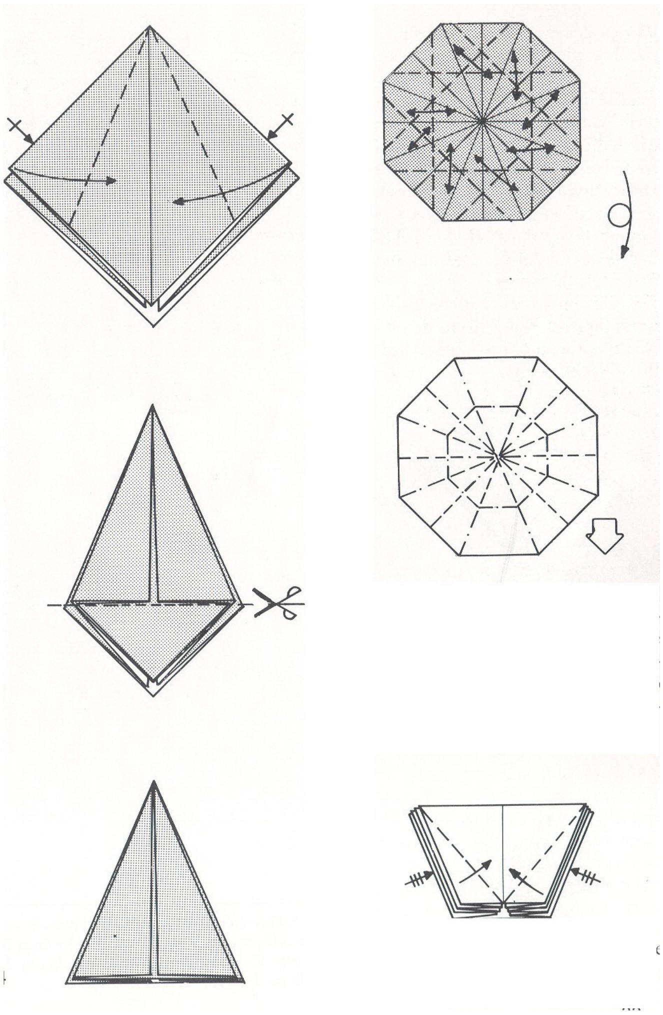
OCTÓGONO:



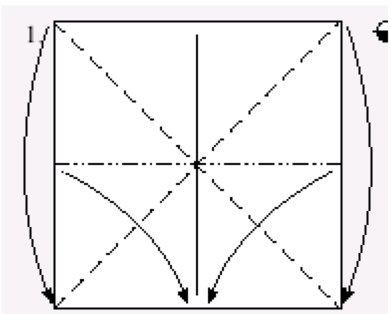
Una vez construído o octógono e a medida que se van estudaando as súas propiedades dende o punto de vista matemático: número de lados, área, perímetro, ángulos internos y externos... é interesante a realización dunha flor a partir dun octógono.

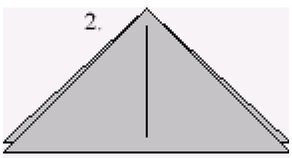
FLOR OCTÓGONO



POSAVASOS OCTOGONAL

Base bomba. 8 módulos iguais.





CALEIDOCICLOS

Kalós (bellos) + eîdos (figura) + kŷklos (anillo)

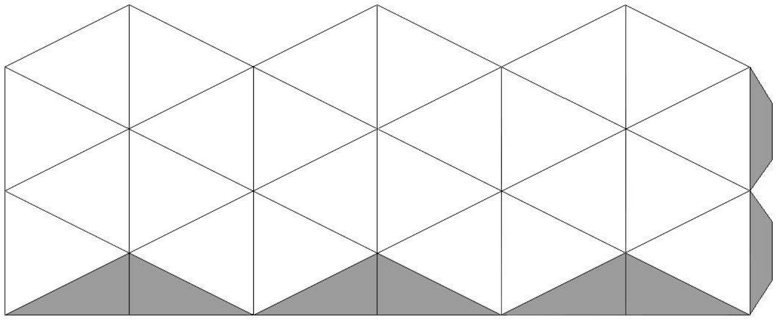
Os caleidociclos son anillos tridimensionais compostos por pirámides unidas polas aristas. Poden xirar sobre si mesmos infinitas veces sen romperse nin deformarse en torno o seu centro.

É sinxelo construír caleidociclos, xa que o seu desenvolvemento é plano e extremadamente simple.

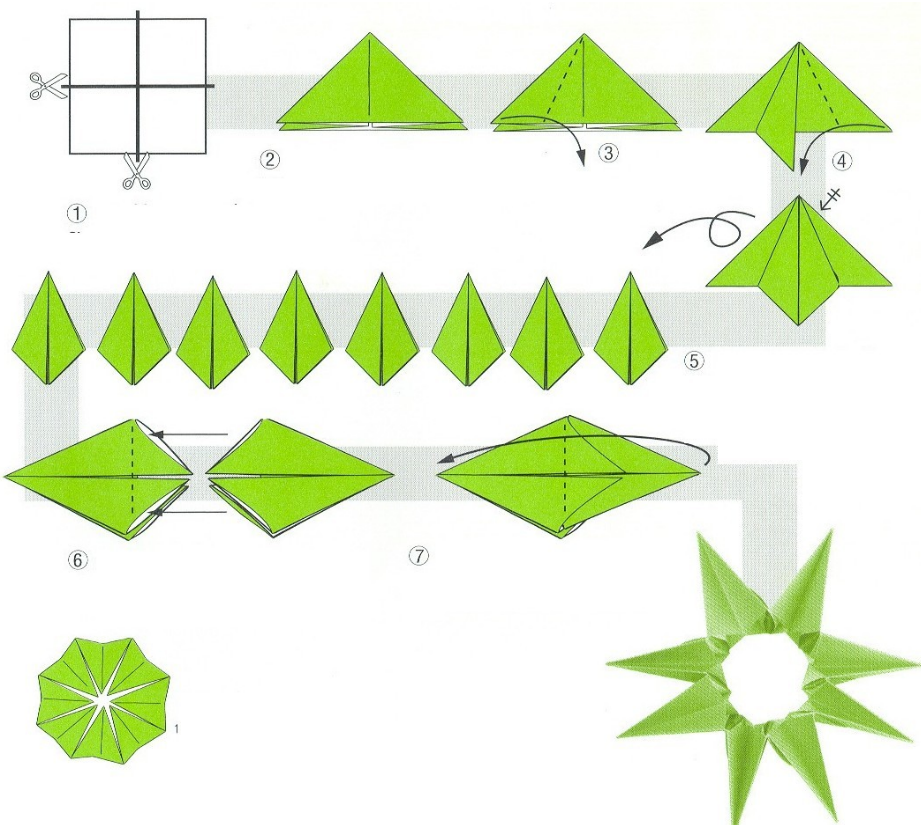
Os exemplos máis coñecidos de caleidociclos son aqueles compostos por tetraedros e en particular os modelos de Escher. Os caleidociclos son unhas figuras belas e fascinantes. Ademais da súa beleza intrínseca, préstanse a ser decorados de distintas maneiras. No libro «M. C. Escher. Calidociclos», de Doris Schattschneider y Wallace Walker (editorial Taschen) atópanse modelos para construír dez calidociclos, ademais doutros seis sólidos, decorados con teselacións do artista holandés M. C. Escher.

Escher siempre intentóu que as súas teselacións tivesen un principio e unha fin. Para iso desenvolveu ideas tan fascinantes como usar o plano hiperbólico e una cinta de Moëbius

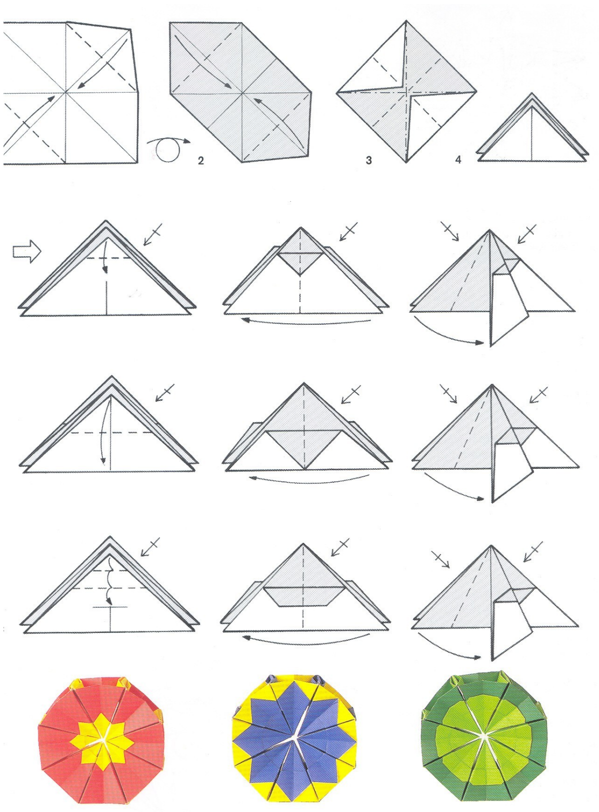
A mellor maneira de facernos unha idea de que é un calidociclo é construíndo un. Este é o desenvolvemento plano dun caleidociclo hexagonal, así chamado porque visto dende arriba una vez cerrado en torno ó seu centro, ten forma de hexágono regular.



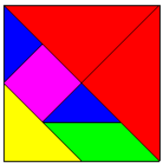
CALEIDOCICLO PIRÁMIDE BASE CUADRADA



VARIACIÓNS



O TANGRAM



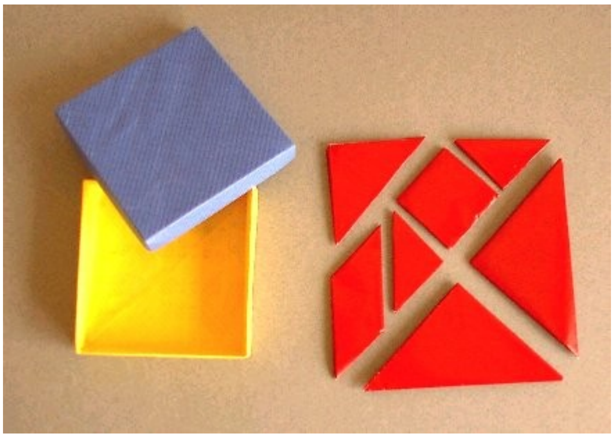
O tangram é un dos xogos máis antigos do mundo. En China, onde naceu, coñecese co nome de *qi qiao du,* que significa «disposición inxeñosa de sete pezas». Unha lenda conta que todo empezou cando unha baldosa caeu accidentalmente e o albanel que intentaba reconstruíla quedou fascinado pola infinidade de combinacións posibles que ofrecía.

Na versión máis habitual hai que usar sete pezas para conseguir un cadrado ou construír diversas figuras.

Sen dúbida, trátase do crebacabezas máis antigo da historia da humanidade, dunha extremada sinxeleza e cunha gran capacidade combinatoria.

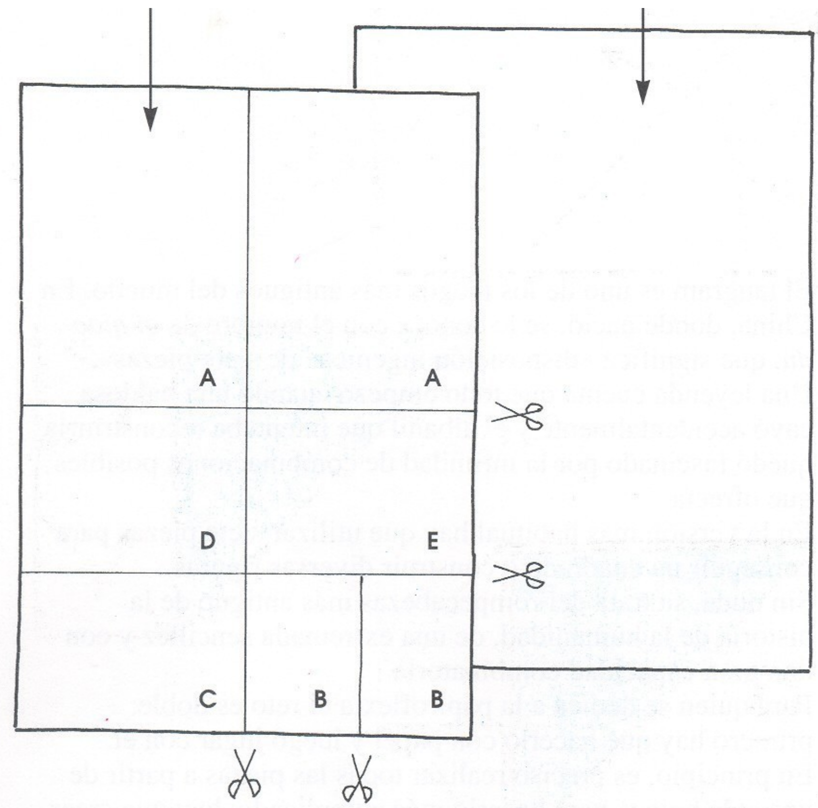
Para quen se adica á papiroflexia o reto é dobre: primeiro hai que facelo e logo xogar con el.

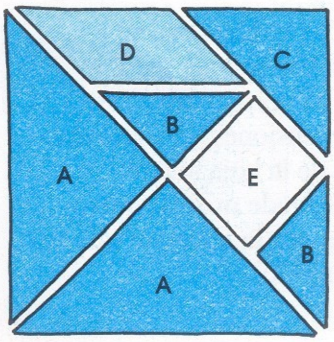
Primeiramente, é preciso facer tódalas pezas a partir dunha soa folla e, para facelo mais complexo, hai que crear un envoltorio con outra folla das mesmas dimensións que a primeira.

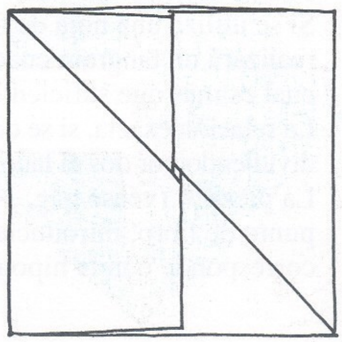


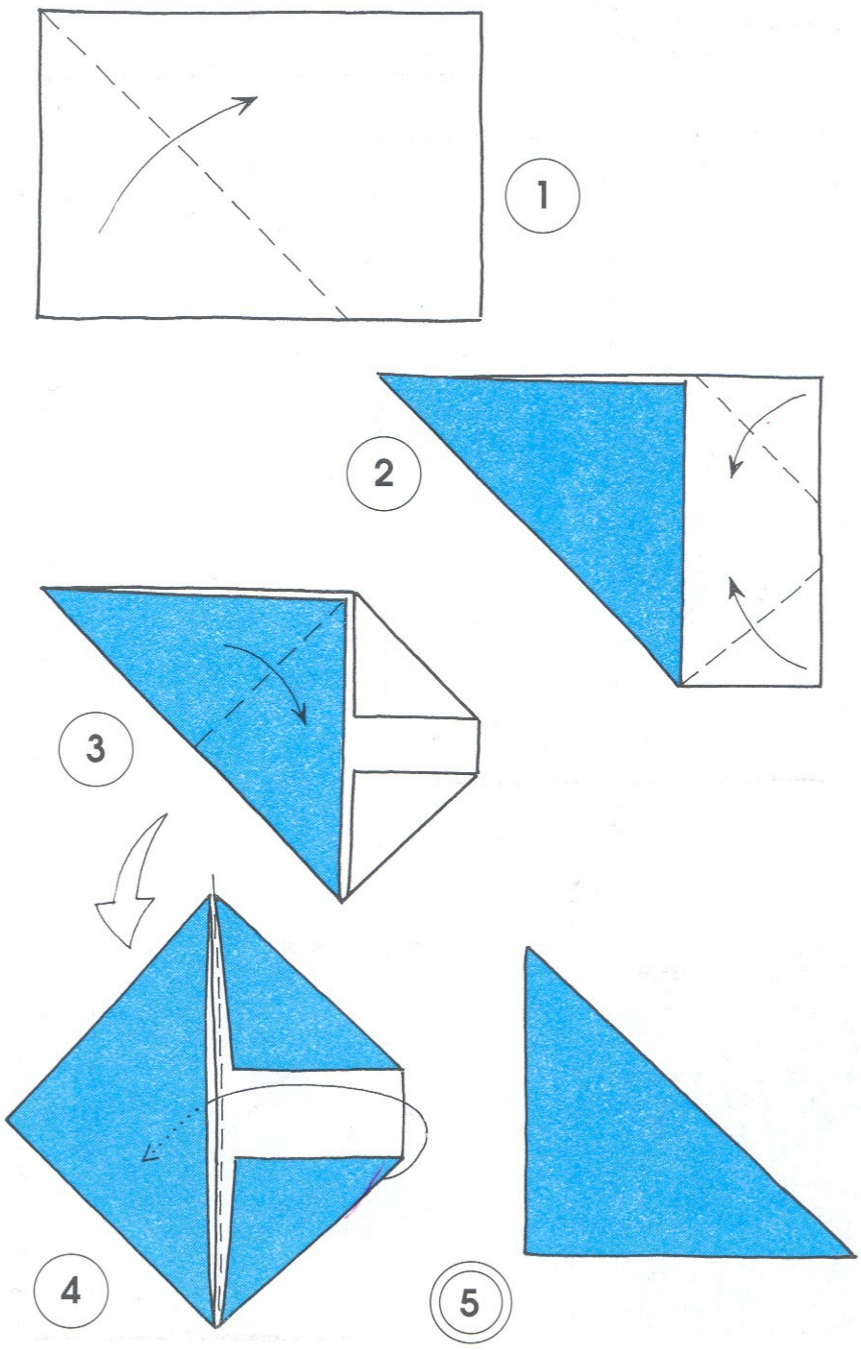
Existen outras maneiras de realizar un tangram, pero esta é unha das máis sinxelas.

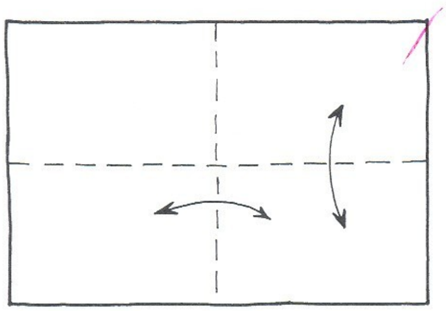
TANGRAM E ENVOLTORIO (Pietro Macchi)



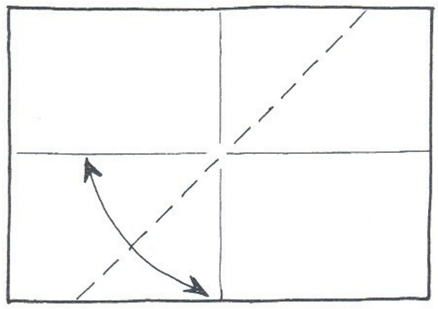




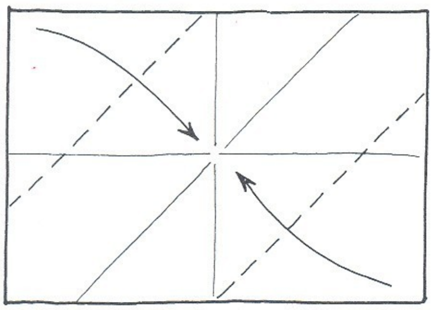

1
2
3
4
5



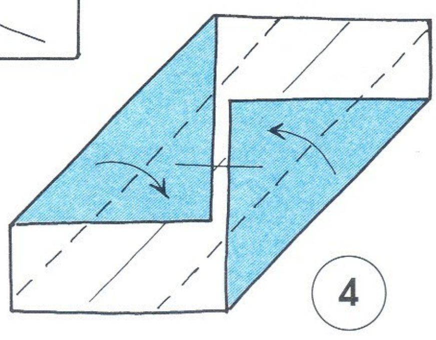
1



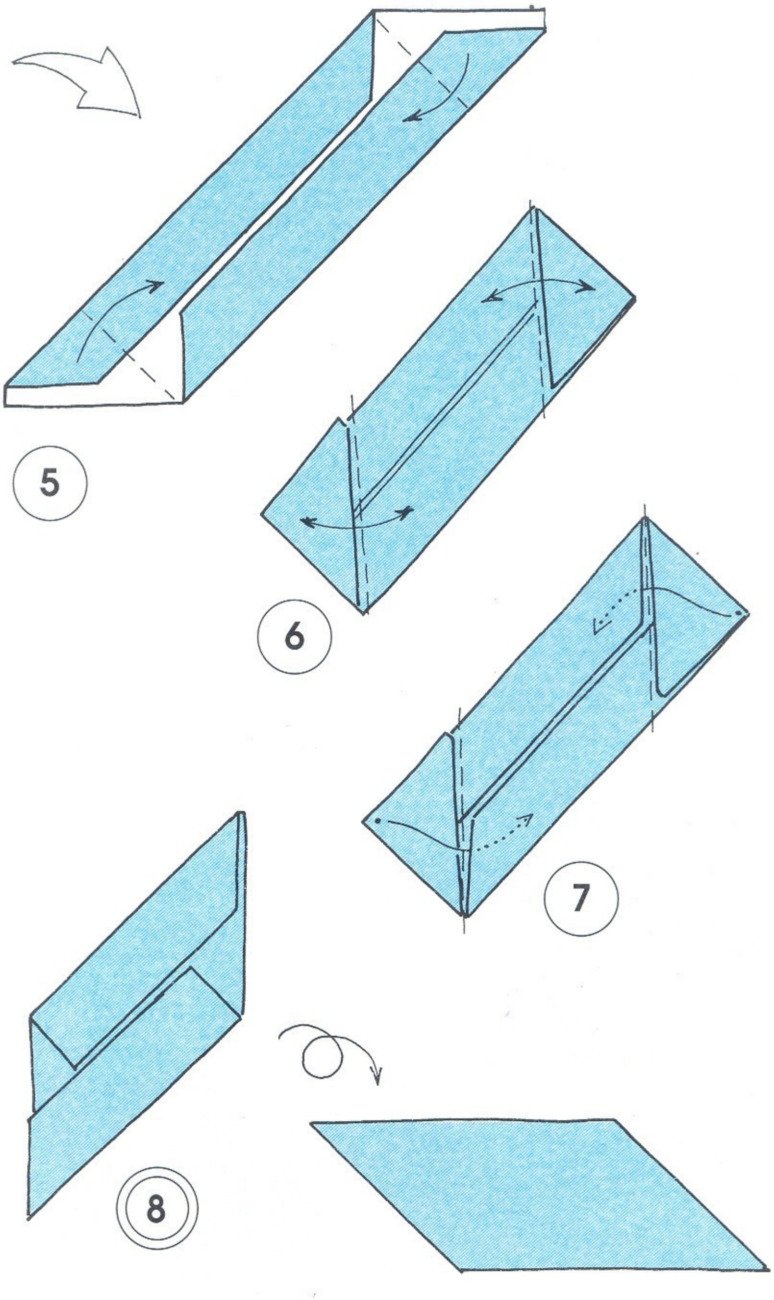
2

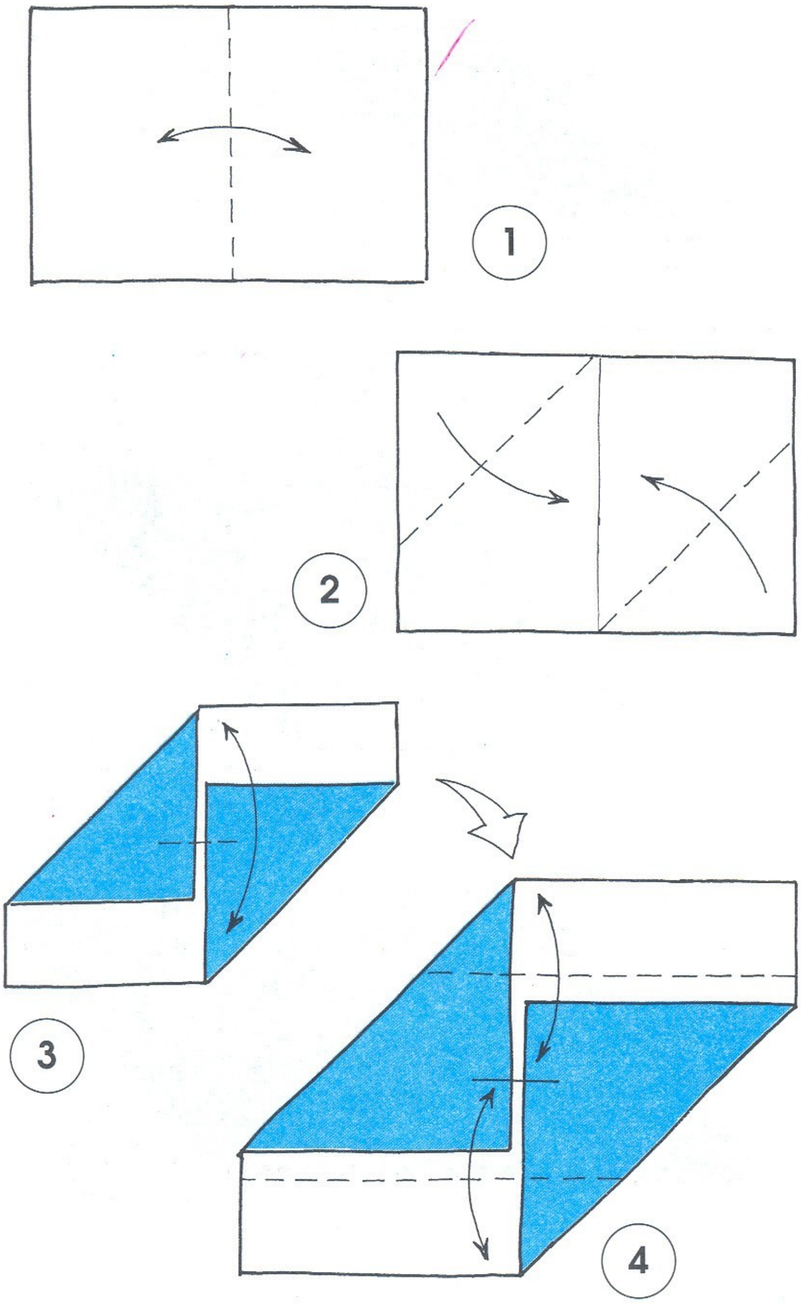


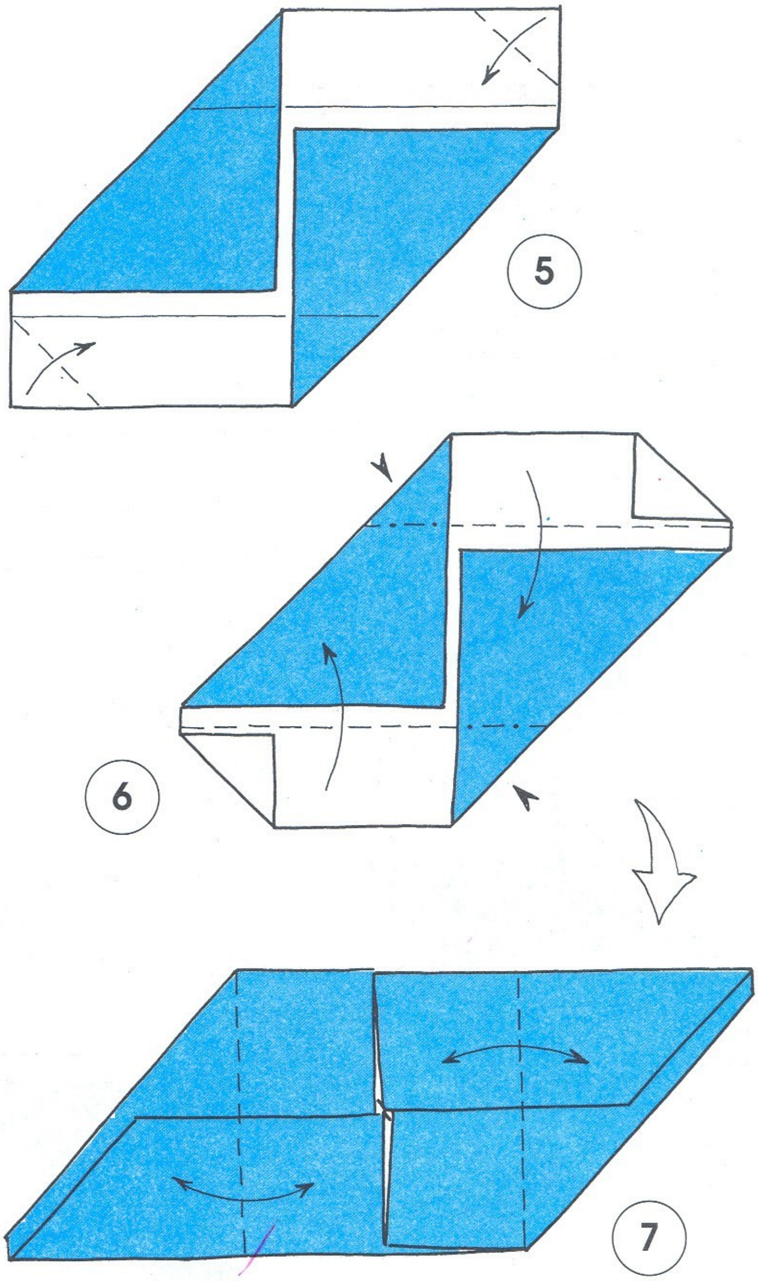
3

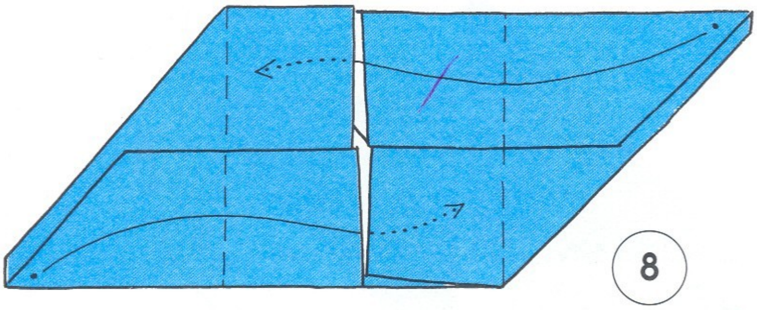


4

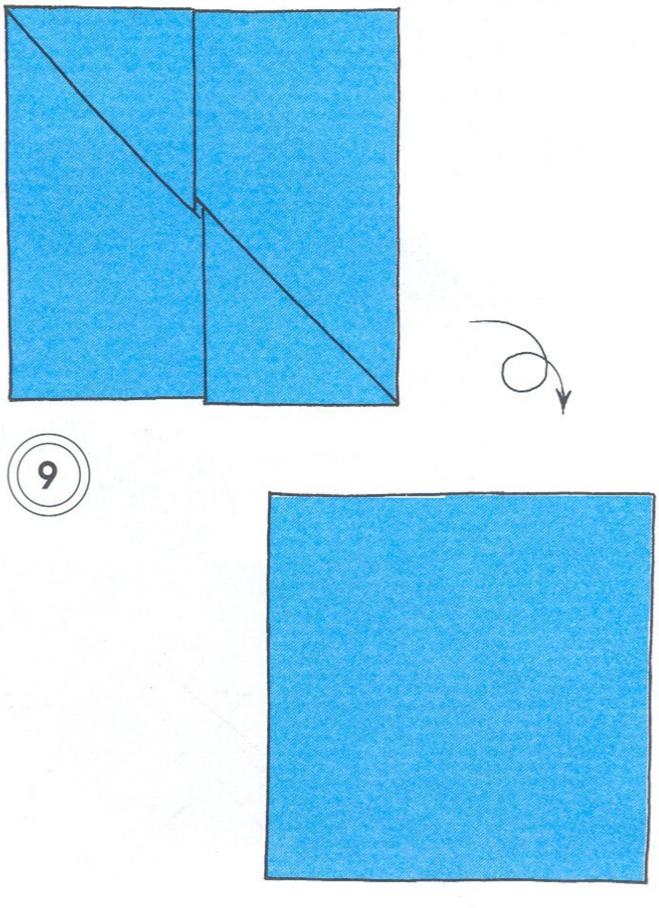

5
6
7
8


1
2
3
4

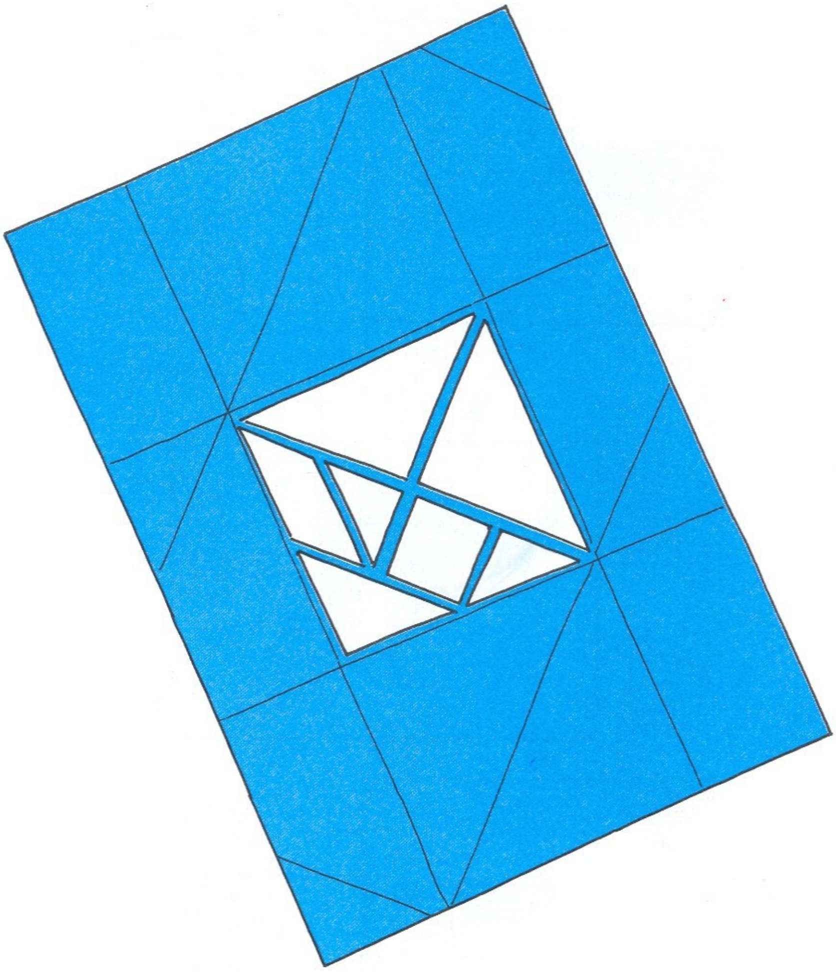

5
6
7



8



9



RELACIÓNS XEOMÉTRICAS

O tamgran consta de sete pezas: un cadrado, un paralelogramo, dous triángulos grandes iguais, un triángulo mediano e dous triángulos pequenos.

Relacións entre as áreas

O triángulo grande ten unha área dobre da do mediano

O mediano ten área dobre do triángulo pequeno

O triángulo mediano, o cadrado e o paralelogramo teñen a mesma área

Medidas dos ángulos

O cadrado como é lóxico ten os catro ángulos de 90º

O paralelogramo ten dous ángulos de 45º e outros dous de 135º

Os cinco triángulos son rectángulos isósceles polo que os ángulos agudos son de 45º

Relacións entre os lados:

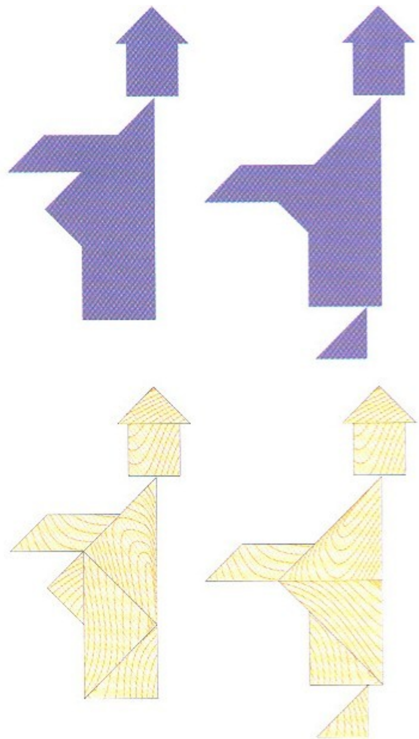
O cateto do triángulo grande ten a mesma lonxItude cá hipotenusa do triángulo mediano

O cateto do triángulo mediano ten a mesma lonxitude cá hipotenusa do triángulo pequeno, que a diagonal do cadrado e que un dos lados do paralelogramo.

O cateto do triángulo pequeno ten a mesma lonxitude có lado do cadrado e có outro lado do paralelogramo.

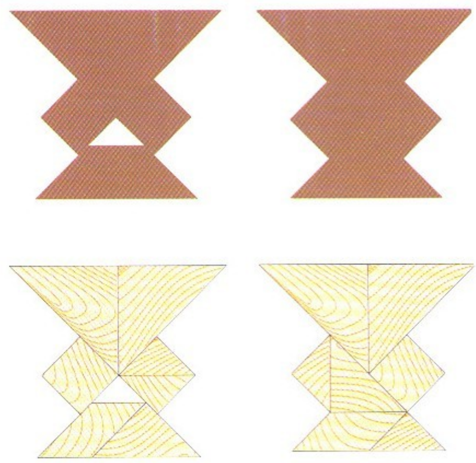
Estas concordancias entre as lonxitudes dos lados e as medidas dos ángulos son as que fan posible que se poidan construír co Tamgram as formas máis variadas

Co Tamgran pódese facer unha comprobación do teorema de Pitágoras



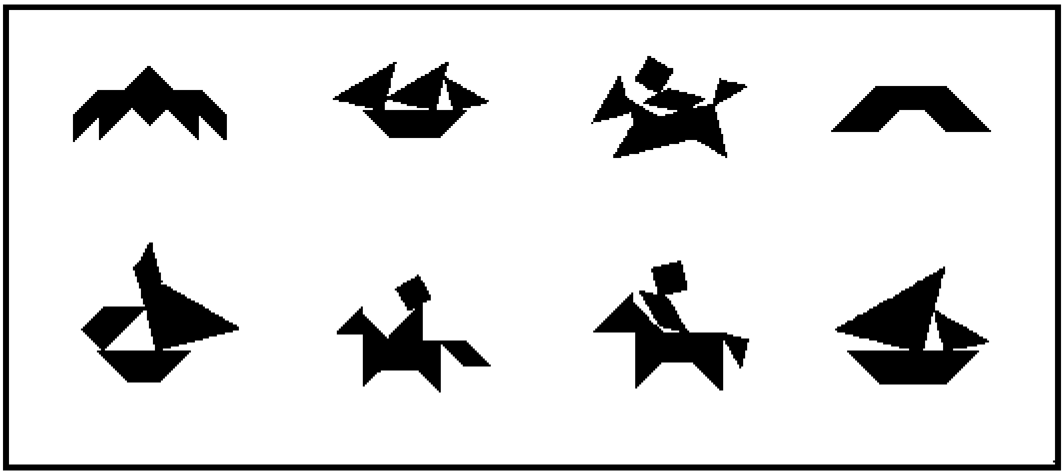
As paradoxas son figuras aparentemente contradictorias que se poden construír co Tamgram, unha das máis coñecidas ideada por Henry Dudeney é a destas dúas siluetas da mesma forma.... so que unha delas apoiase nun pé e a outra non!.

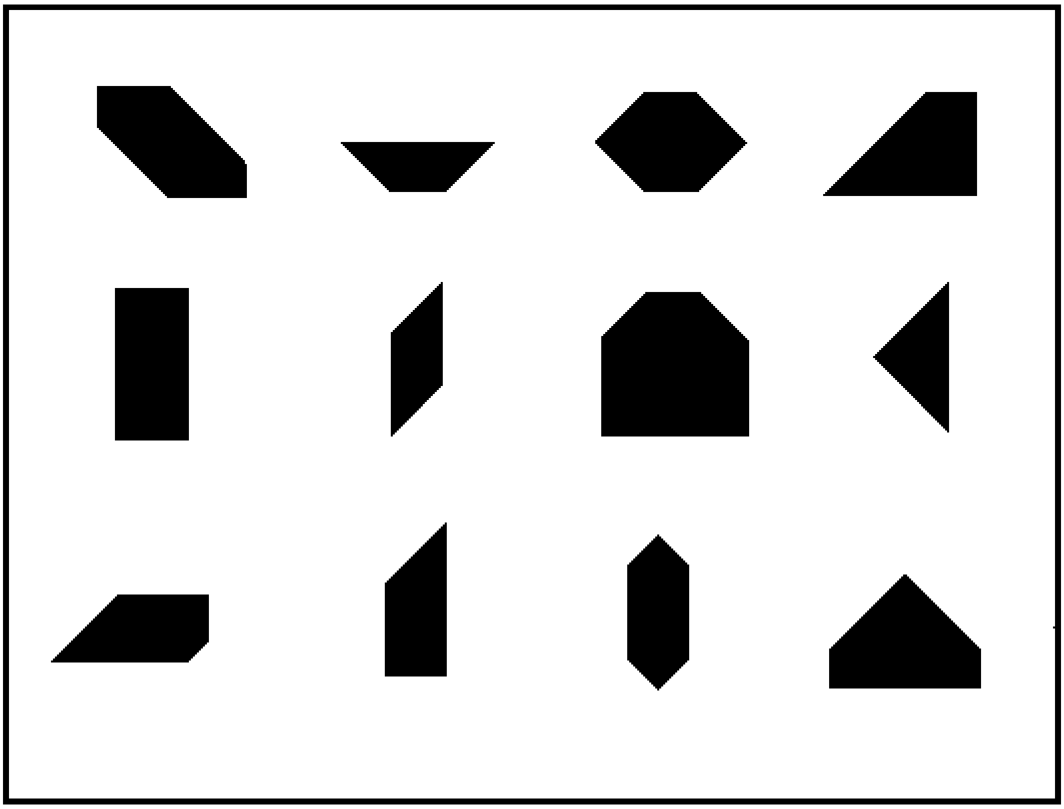
Cando se constrúen as figuras atópase facilmente a explicación. Na realidade a área total das dúas é a mesma. A figura que se apoia sobre un pé é lixeiramente máis pequena cá outra e compensa a súa diferencia de tamaño co pé sobre o que se apoia.

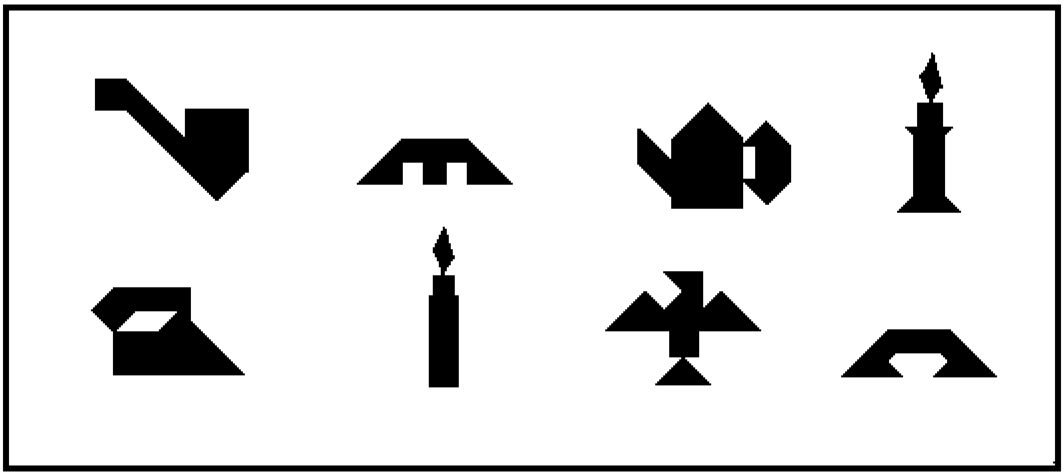


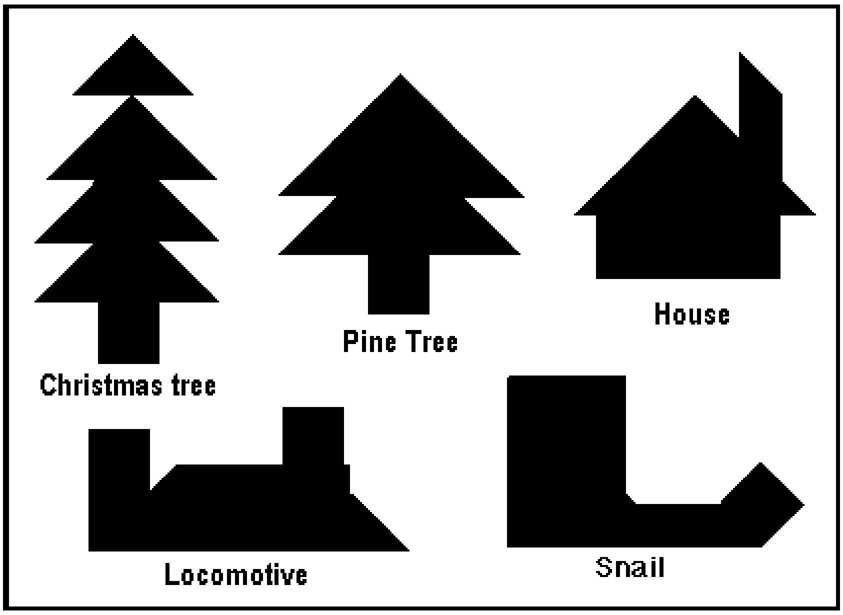
Outra falacia do mesmo tipo é a dos xarróns. Con eles cabe a posibilidade de inventar unha historia de detectives que atopan un xarrón feito anacos e se esforzan en buscar a peza que falta.

ALGUNHAS FIGURAS DA MESMA AREA QUE SE PODEN FACER CO TAMGRAM








Christmas tree
Pine Tree
House
Locomotive
Snail

O CREBACABEZAS DE MARC KIRSCHENBAUM.

O crebacabezas de Marc Kirschenbaum, enmarcado dentro dos chamados puzzles-tangram ou puzzles do cadrado nos que descubrimos unha fonte inagotable de relacións xeométricas.

Vainos proporcionar material para profundizar nos seguintes apartados:

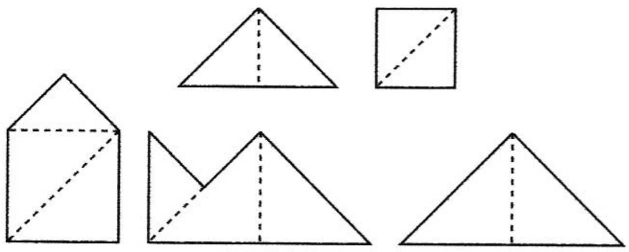
*División dunha folla de papel cadrado en 3 partes iguais.

*Construción de polígonos regulares.

*Estudo do triángulo. Áreas, perímetros, semellanzas.....

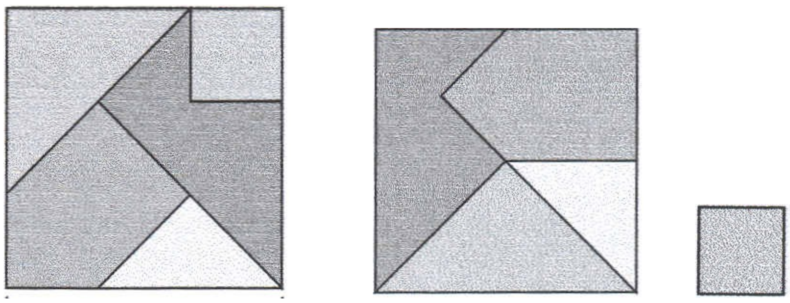
*Teorema de Pitágoras.

Consta de 5 pezas



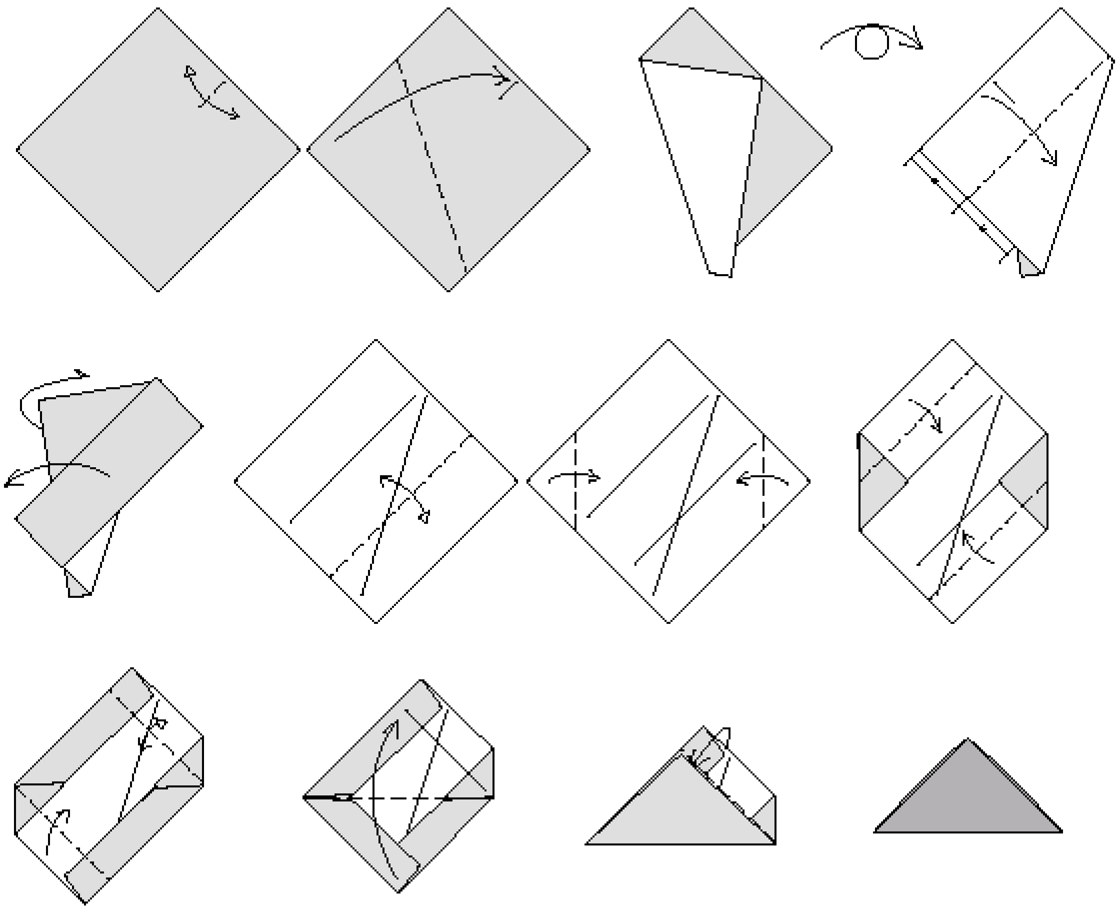
e o obxetivo vai ser:

- Construír dous cadrados coas 5 pezas.
- Construír un cadrado coas 5 pezas.



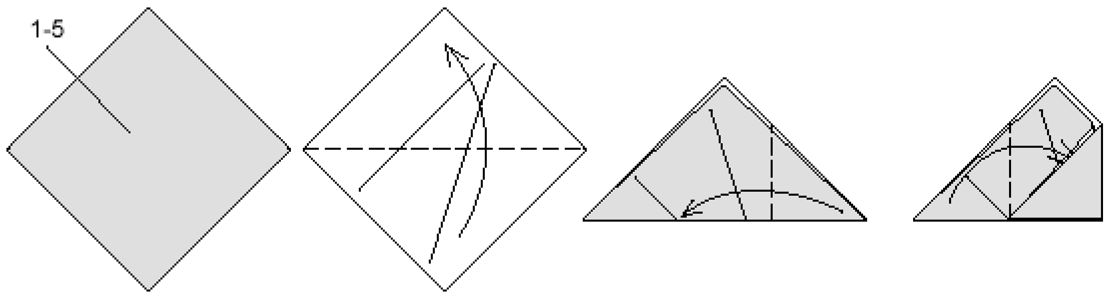
REALIZACIÓN DAS PEZAS:

Primeira peza:



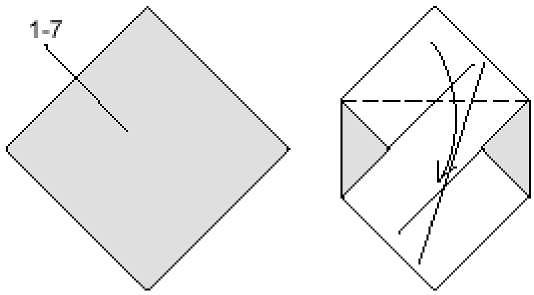
Segunda peza:

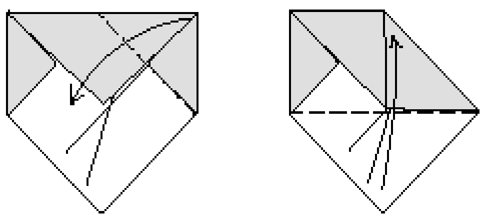
Repetimos os 5 primeiros pasos da peza anterior e continuamos

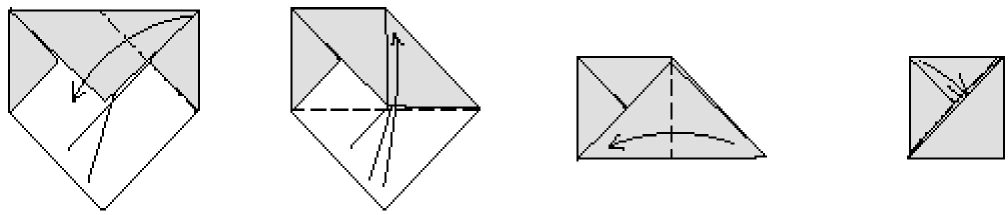


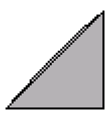
Terceira peza:

Repetimos os 7 primeiros pasos da primeira peza



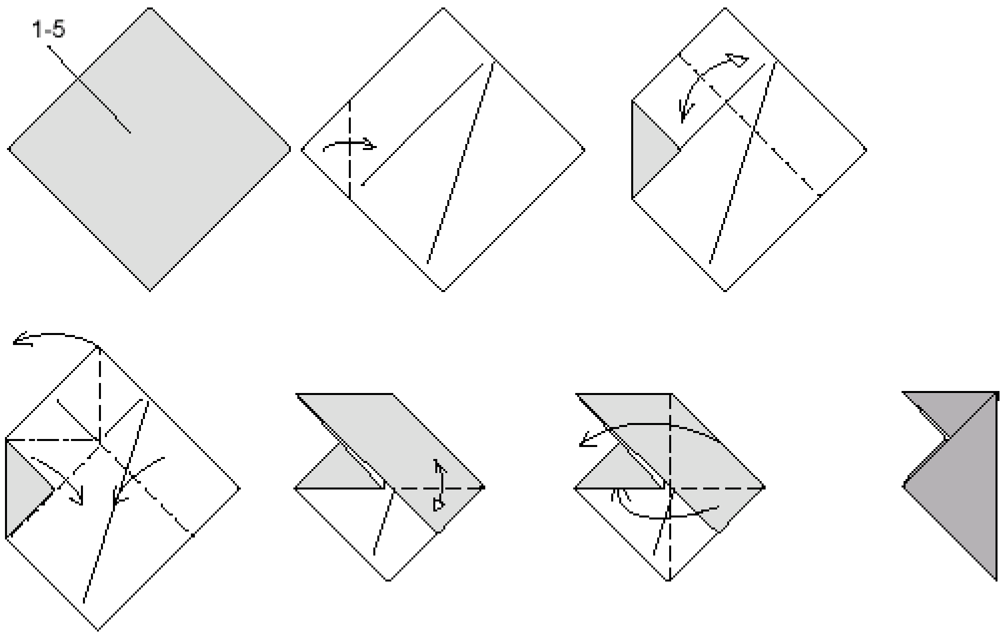






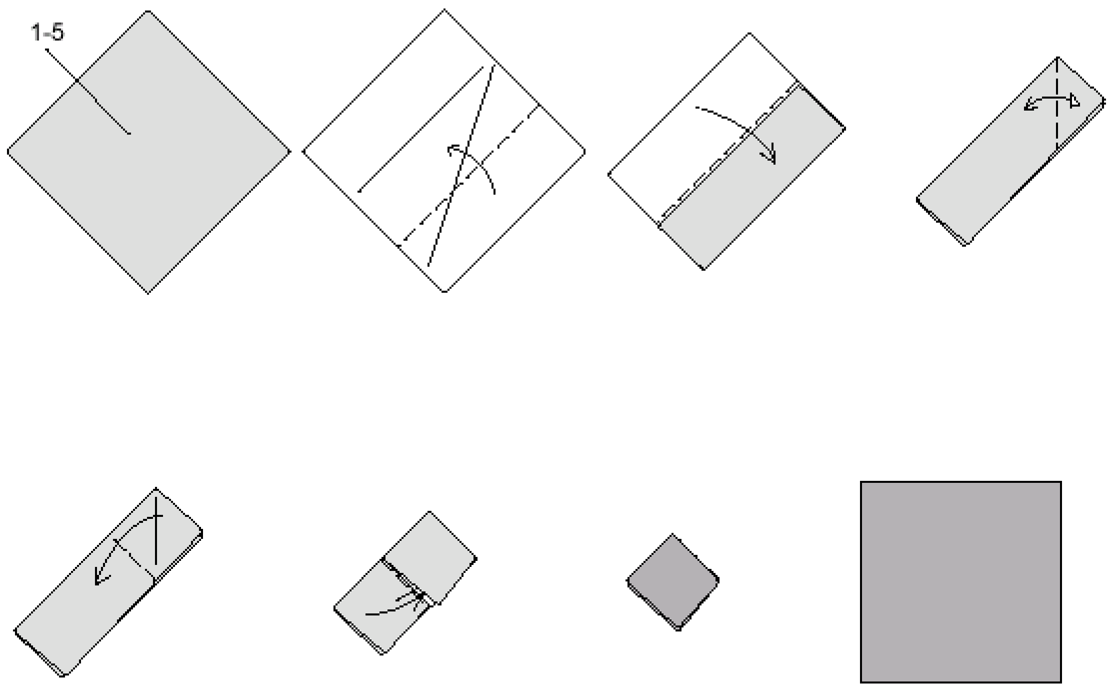
Cuarta peza:

Empezamos no paso 5 da primeira

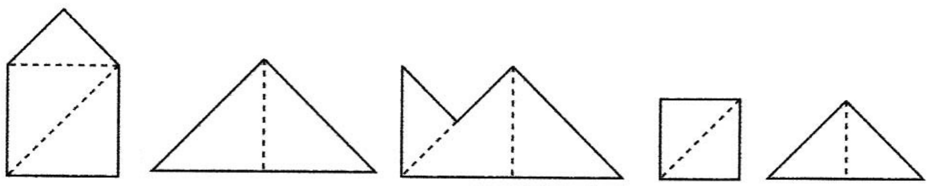


Quinta peza:

De novo empezamos no paso 5 da primeira



Entre as pezas construídas existe un gran número de relacións xeométricas.



Expoñemos a continuación 5 actividades creadas polo coordenador Gail Hoskins de Outreach de ENC, que son apropiadas para unha variedade ampla de niveis.

Actividade 1: Exploracións cun puzzle de 5 pezas.

* Describa cada peza de tantas maneiras como sexa posible.

* Encontre o perímetro e a área de cada peza en centímetros.

* Ordene as pezas de maior a menor respecto do perímetro.

* Ordene as pezas de maior a menor respecto da área. ¿seguen a mesma orde?

* Retire a peza do cadrado pequeno e combine as outras 4 pezas para formar un cadrado.

1. ¿Pode probar que é un cadrado? Suxerencia: deixe o lado do cadrado pequeno como unidade de medida
2. Encontre a área e o perímetro deste novo cadrado.

* Combine as 5 pezas para facer un cadrado grande

1. ¿Pode probar que é un cadrado?.

2. Encontre a área e o perímetro do cadrado grande

* Compare as áreas e os perímetros destes dous cadrados. Comprobar que a área do cadrado de 4 pezas máis a área do cadrado pequeno é igual á área do cadrado de 5 pezas. ¿É tamén verdade para os perímetros?.

Actividade 2: Exploracións con dous puzzles.

* Faga un cadrado coas 10 pezas.

1. ¿Pode probar que é un cadrado?
2. ¿Cal é a súa área e o seu perímetro?

* Nunha táboa rexistre a área e o perímetro de cada unha das 10 pezas. ¿As 10 áreas individuais dan a área dun cadrado de 10 pezas? ¿ Os 10 perímetros individuais dan o perímetro do cadrado de 10 pezas?

* Use as 10 pezas para crear un triángulo rectángulo isóscele. ¿Pode probar que é isósceles?

* Encontre a área e o perímetro dese triángulo

* Faga un esquema da composición dos crebacabezas e compare distintas solucions ¿Son realmente distintas?

* Compare as áreas e os perímetros do cadrado e do triángulo.

* Cree outras formas combinando as 10 pezas e estudie a súa área e o seu perímetro comparando os distintos resultados. Non é preciso que sexa unha forma regular.

Actividade 3: Estudo dos ángulos.

* Mida cada ángulo en cada peza do puzzle de 5 pezas ¿Cal é a suma dos ángulos de cada peza.

* Nas formas que construíu nas actividades 1e 2 estude os ángulos e atope a suma dos ángulos en cada unha das figuras.

* Das súas observacións ¿Que pode concluír da área? Suxerencia: Pense nas áreas de formas máis pequenas que se agregan para formar unha forma máis grande.

* Das súas observacións, ¿Que pode concluír sobre o perímetro?. Suxerencia: Pense nos perímetros de formas máis pequenas que non son iguais ó perímetro dunha forma máis grande.

* ¿Qué pode decir sobre a suma dos ángulos como consecuencia de isto?. Suxerencia: Pense que a suma da área de tódalas pezas igualaba ó área do cadrado grande. ¿Pode isto suceder se se suman os ángulos das pezas? ¿Poden os ángulos dun cadrado sumar máis de 360º?.

Actividade 4: Explorar 360º

* Crebacabezas de 10 pezas.

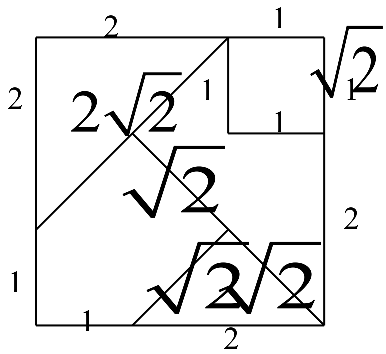
* Combine algunha destas pezas arredor dun punto para crear unha forma completa de 360º. ¿Cal é o menor número de pezas que pode usar para facer isto? ¿Cal é o numero máis grande de pezas que se pode usar para facer isto?.

Actividade 5: Demostrando o Teorema de Pitágoras.

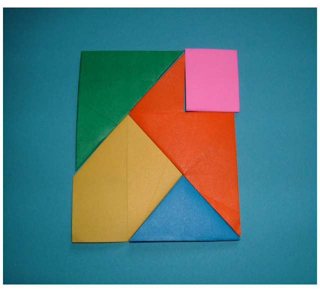
Use 10 pezas (2 puzzles) Faga un cadrado (Chamado o cadrado A) con 4 pezas. Faga outro cadrado (Chamado o cadrado B) coas 5 pezas do 2º puzzle. Compoña A^2, B^2 e a peza do cadrado pequeno do crebacabezas para usar nun lado para a formación dun triángulo rectángulo.

Tendo en conta o visto nas actividades anteriores teremos demostrado o teorema de Pitágoras.

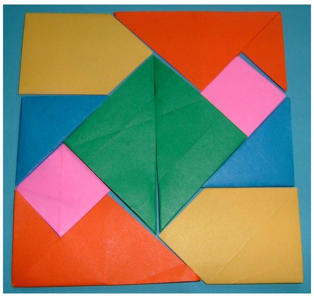
Gráficos referentes ás actividades anteriores:



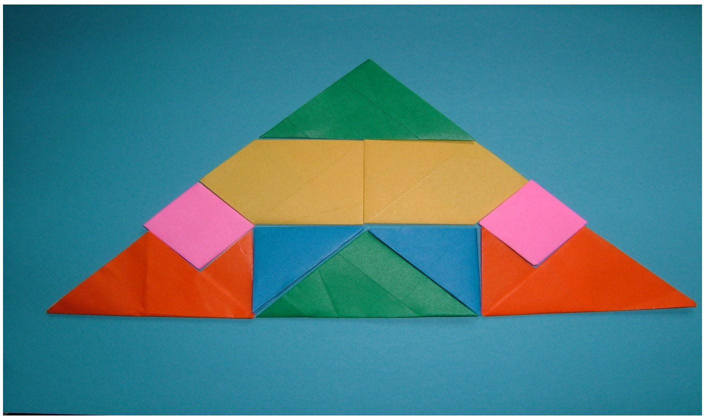
Crebacabezas 5 pezas: Perímetros



Crebacabezas de 10 pezas:



Triángulo isósceles:



Teorema de Pitágoras:

POLIEDROS

Educar xeometricamente é un obxectivo no que a súa finalidade é facilitar o coñecemento do espazo tridimensional, desenvolvendo a creatividade e os procesos de matematización .

Intentaremos desenvolver unha serie de actividades dirixidas ó estudo de sólidos xeométricos e desenvolver habilidades de razoamento a través da construción e manipulación facendo uso da papiroflexia.

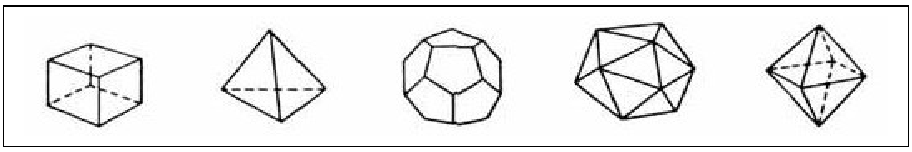
A papiroflexia modular baséase na construción de módulos ou pezas que ó ensamblalas dan lugar a distintos poliedros. Sorprende gratamente ós alumnos o resultado final, sen ter que usar utensillos de debuxo nen pegamento nen tesouras, e ademáis o material é barato e pódese reciclar. A través do doblado os alumnos usan as mans para seguir unha serie de pasos ordenados que lle deben levar a un resultado exitoso, unha importante lección non só para as matemáticas senón tamen para a vida. Piaget sostiña que “A actividade motora na forma de movementos coordinados é vital no desenvolvemento do pensamento intuitivo e na representación mental do espazo”.

Tanto no deseño coma no plegado e na ensamblaxe dos módulos, experiméntanse de forma moi sinxela as propiedades dos poliedros, tales como grao dun vértice, regularidade, simetría, arista cara vértice, etc.

Coa papiroflexia preténdese que os alumnos experimenten situacións de aprendizaxe en grupo, fomento de actitudes relacionadas coa investigación, traballo en equipo, respecto hacia as opinións dos compañeiros.

Sendo a capacidade de abstracción un dos obxectivos máis difíciles de conquerir, que só se alcanza con anos de aprendizaxe, debemos iniciar os exercicios por un plano manipulativo exercitando a imaxinación e a asociación.

Empezaremos cos sólidos platónicos que son poliedros regulares, é dicir, as súas caras son polígonos regulares iguais e en cada vértice concorre o mesmo número de aristas. Só existen cinco: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro; isto atribúese a Teeteto da escola de Platón (425-379 a.C.). Platón atribúe a cada un destes sólidos un dos catro elementos, na pasaxe na que describe a creación do universo. Así o tetraedro é o lume o octaedro o aire, o cubo é a terra, o icosaedro as moléculas de auga, e finalmente relata como o Creador usou o dodecaedro para formar o universo. De aí que reciban o nome de sólidos platónicos.



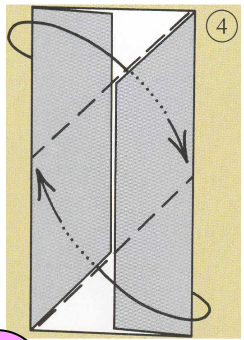
Realizaremos sólidos platónicos de dous tipos:

Módulos por aristas e módulos por caras.

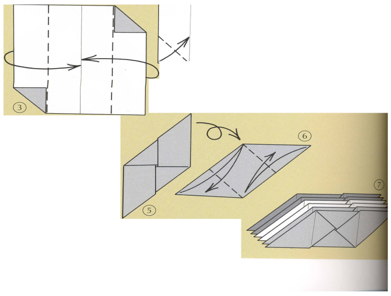
CUBO

MÓDULO SONOBÈ. DIAGRAMAS

Necesítanse 6 módulos iguais

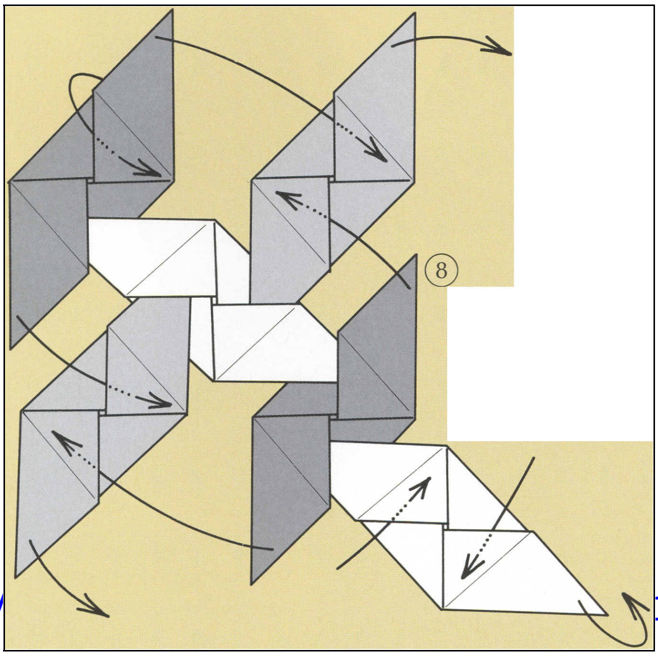


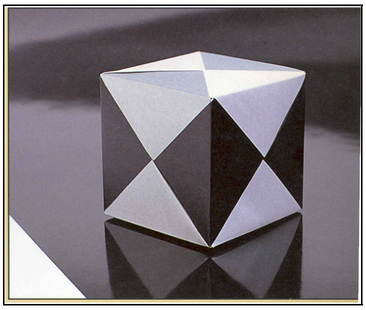
2



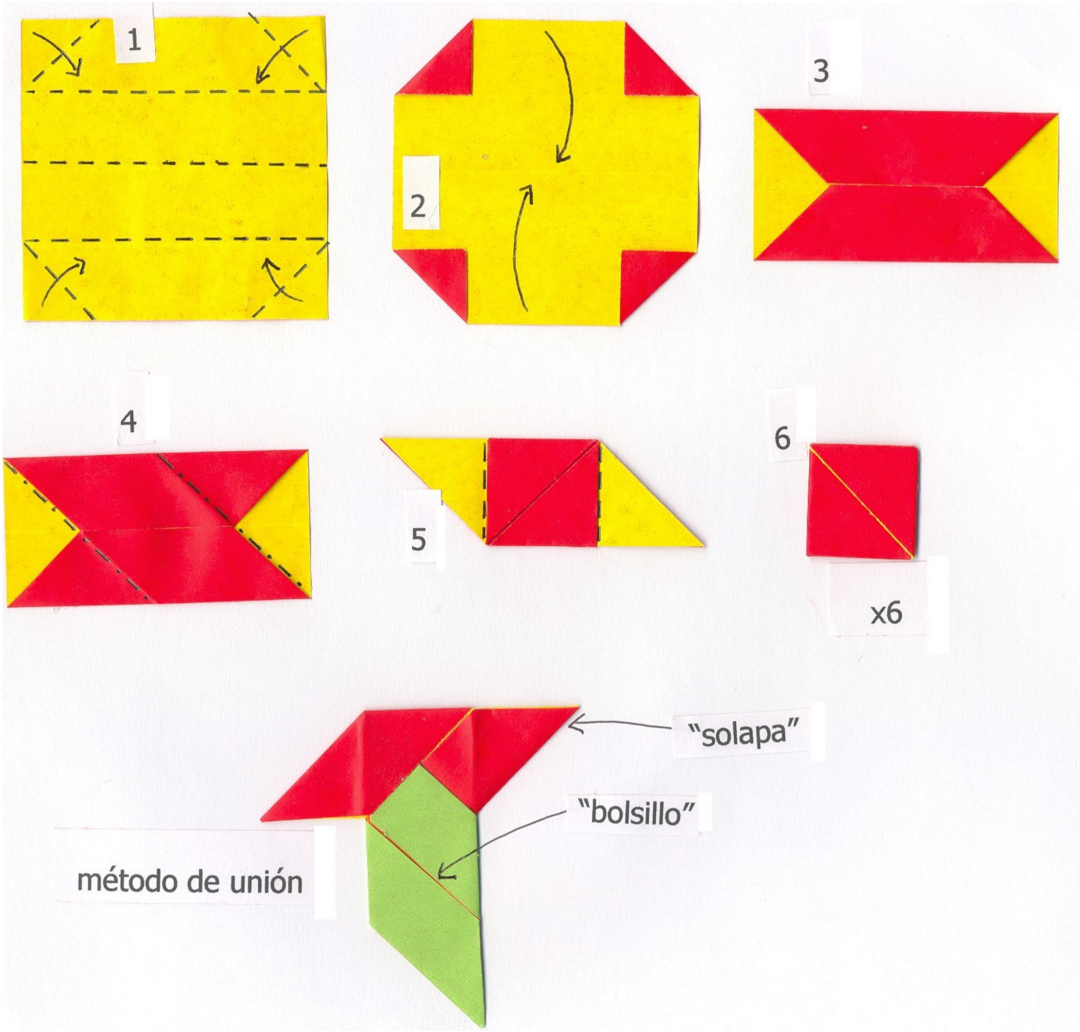
Método de unión

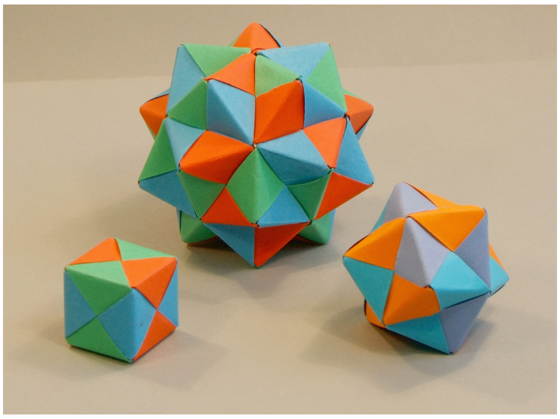
3





V 1)



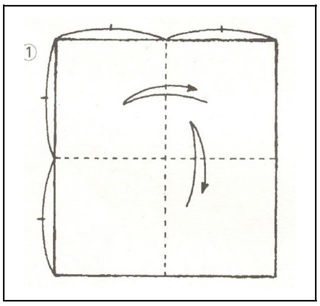


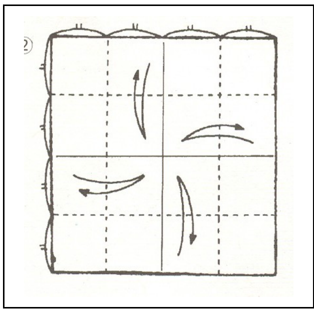
Con 12 módulos faise o estrelado do octaedro e con 30 o estrelado do icosaedro.

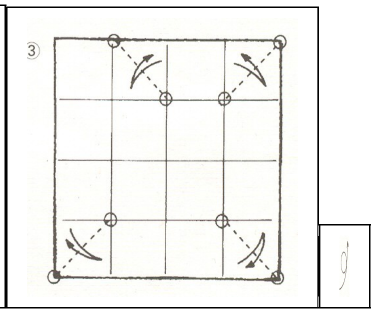
O cubo é tamén estrelado do tetraedro.

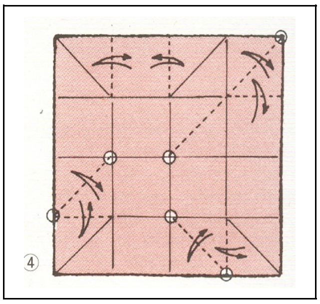
Os estrelados obtéñense ó substituir cada cara do poliedro por unha pirámide triangular

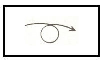
Imos facer a continuación un cubo cunha soa folla de papel,

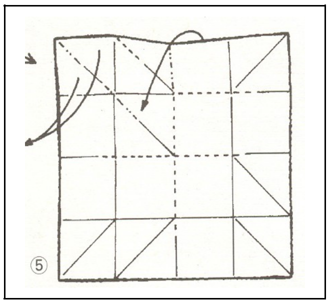


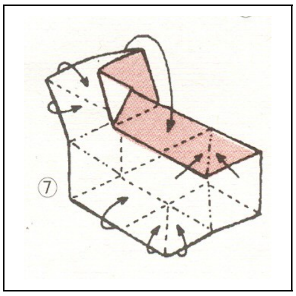


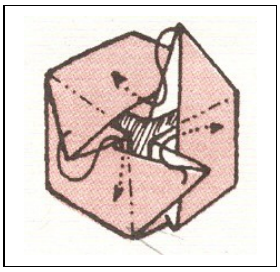




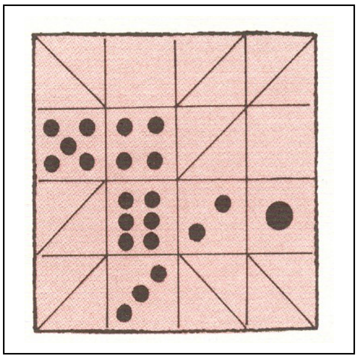








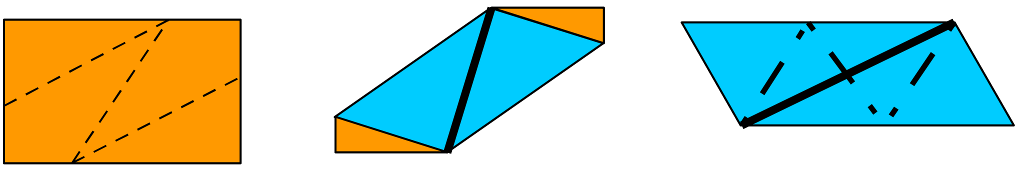
Debuxar os puntos no papel da maneira que se amosa na figura:



produce un dado trucado ó armalo, debido ó peso engadido como resultado de numerosas pregas de papel sobre a cara marcada co punto un; así a cara do seis ten maior probabilidade de quedar arriba cuando se tira o dado.

Esta pequeña "broma" matemática é unha maneira agradable de introducir o concepto de probabilidade, combinatoria e teoría de xogos nun nivel elemental.

TETRAEDRO, OCTAEDRO E ICOSAEDRO:

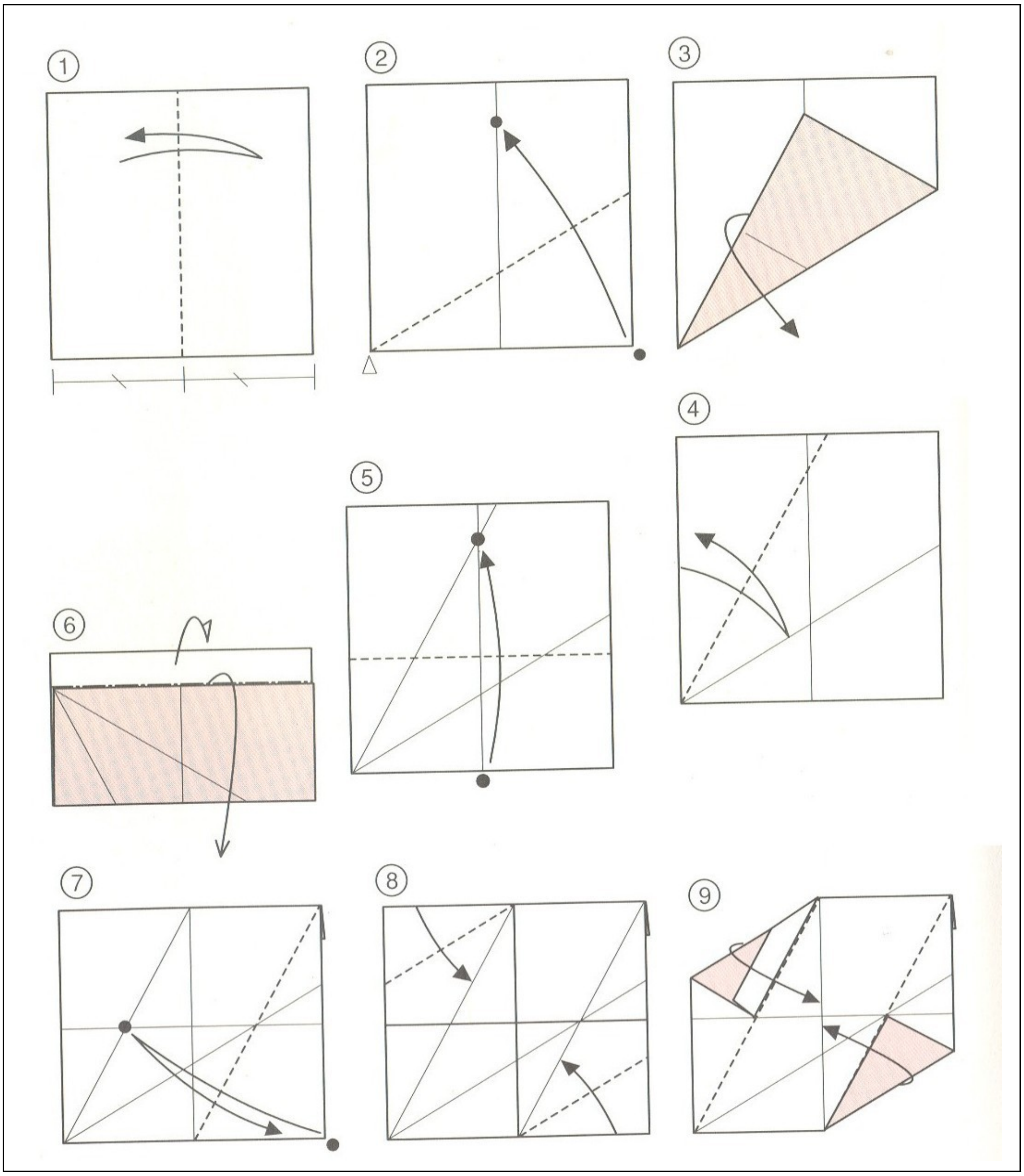


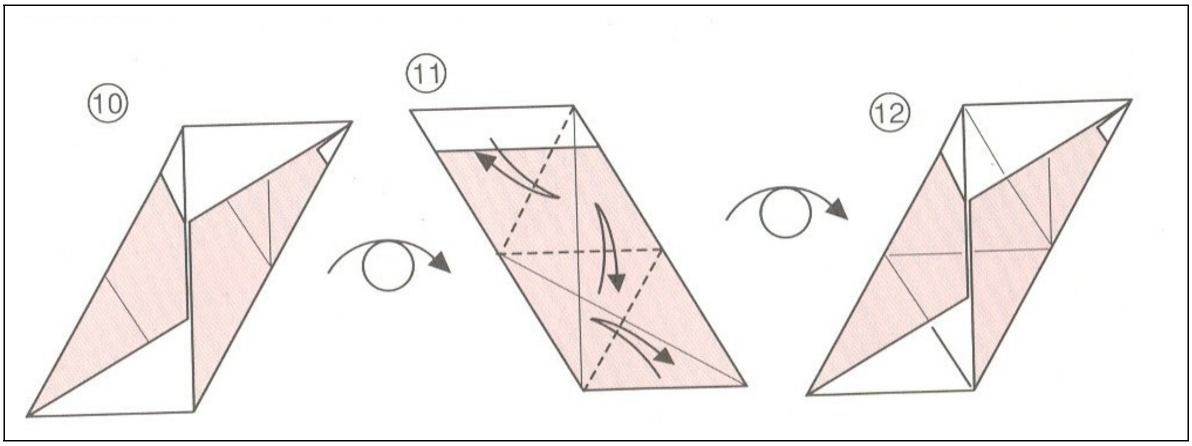
As dimensions do papel: rectángulo 1:√3, os cupóns da O.N.C.E. teñen esta proporción e é unha forma de reciclar

Para o tetraedro fanse dous módulos en espello.

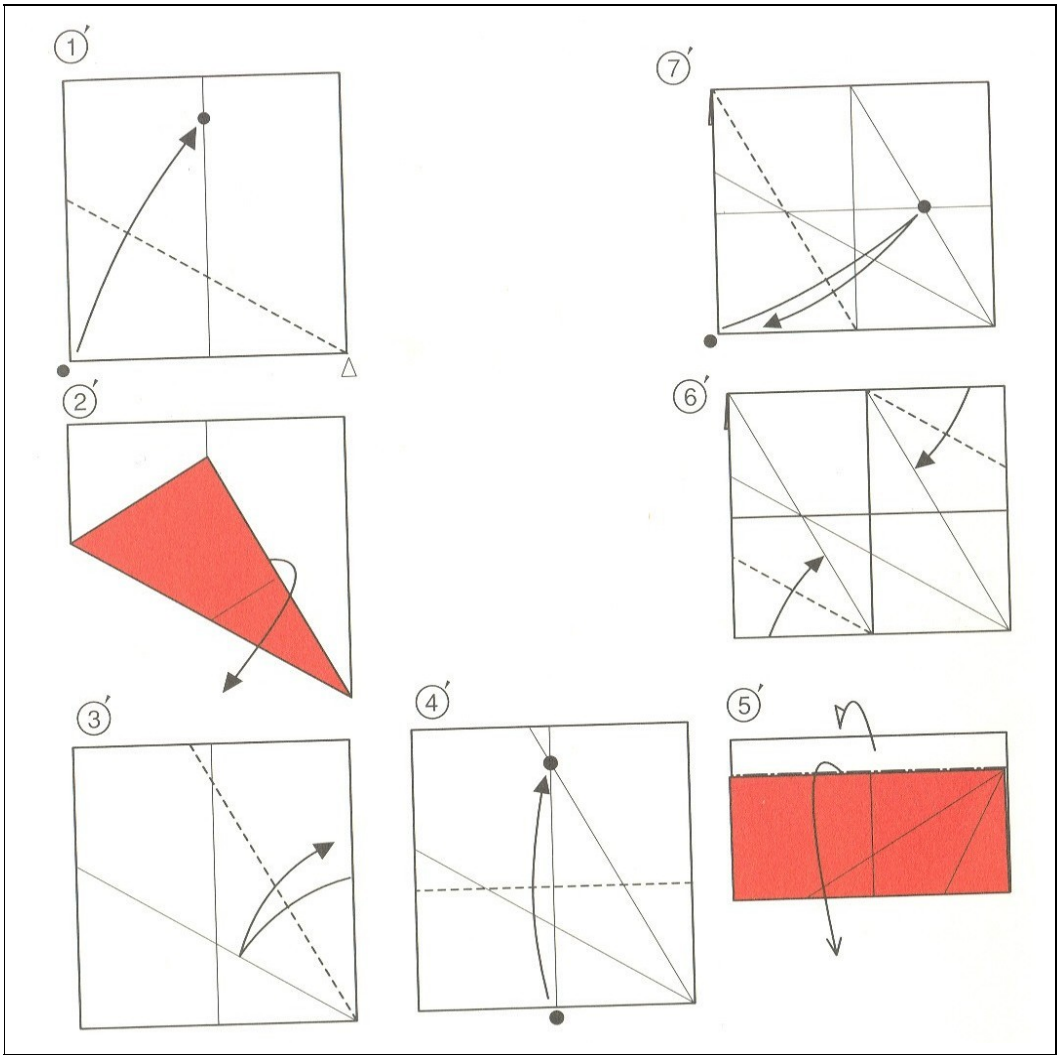
Faremos outros modulos para o tetraedro partindo dun cadrado; facemos antes a proporción dos triángulos equiláteros.

O rectángulo que viramos no paso 6 é o que lle sobra ó cadrado para que a altura sexa raíz de tres.

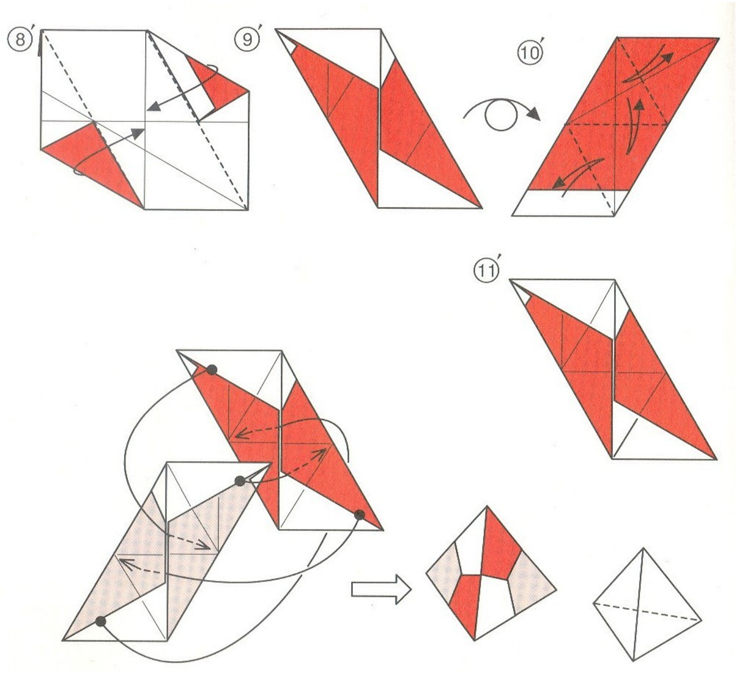




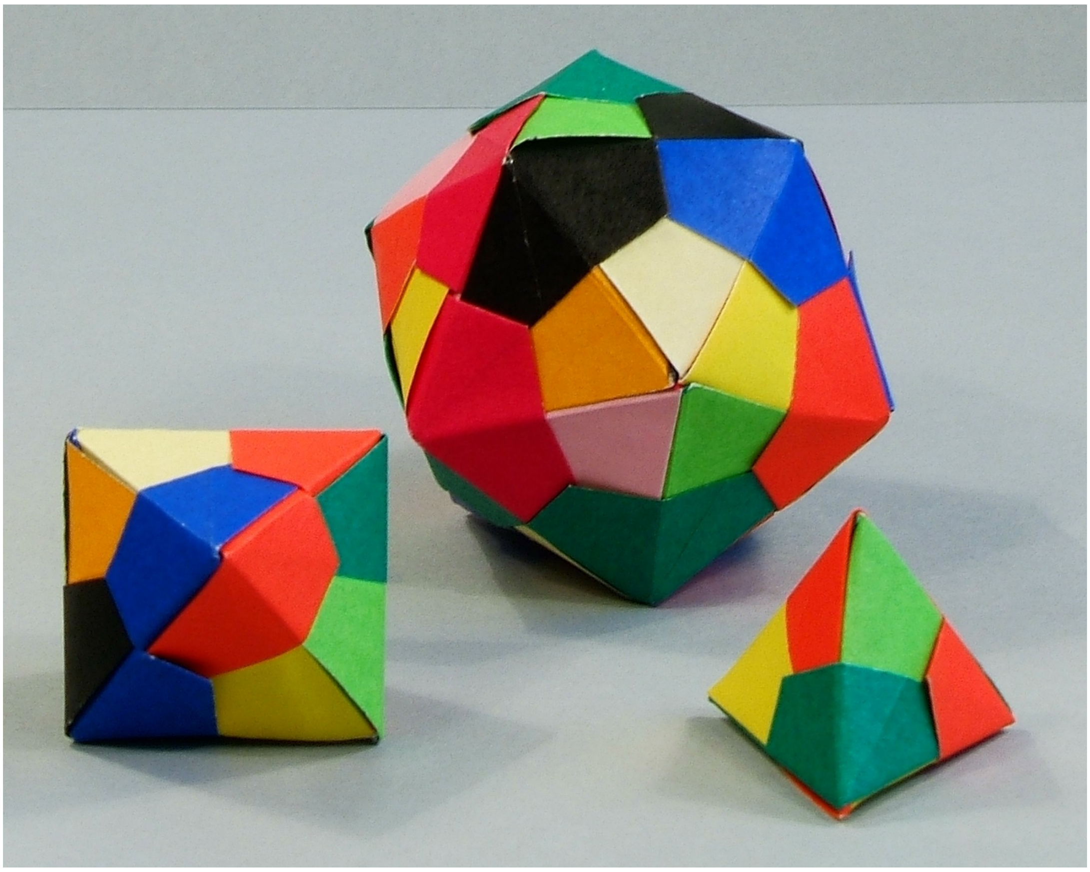
⑩
⑪
⑫



①′
②′
③′
④′
⑤′
⑥′
⑦′

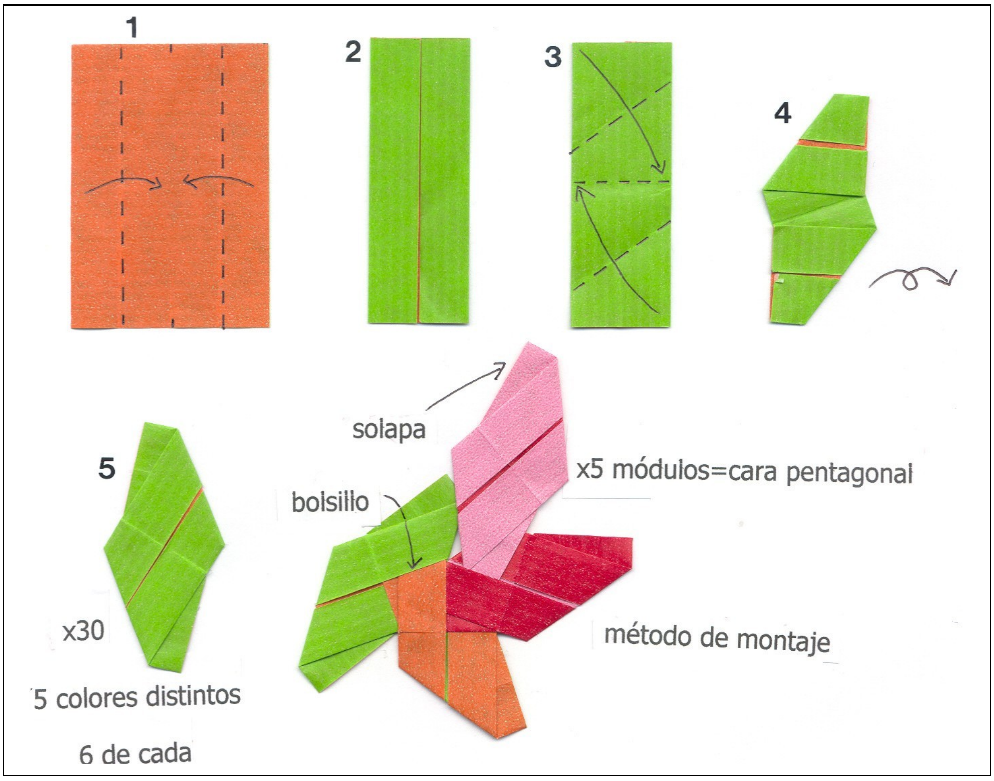


para o octaedro precisamos 4 módulos e para o icosaedro dez en espello, cinco para un lado e cinco para o outro

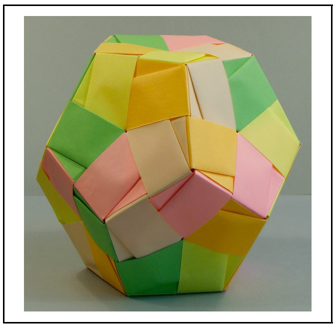


DODECAEDRO DE SILVANA MAMINO

O formato de papel é dina



5 cores distintas

BISECCIÓN DO TETRAEDRO

Thoki Yenn Orikata

Os xogos matemáticos construtivos vannos permitir:

• Estudar e analizar as propiedades dalgunas figuras xeométricas planas, tales como o rectángulo, o cadrado e o triángulo equilátero. Nestas propiedades inclúense a identificación das súas partes e de propiedades que permiten a súa construción.

• Construír poliedros regulares e estudar as súas propiedades básicas, particularmente sobre a forma e o número das súas caras, así como a cantidade de vértices e de aristas.

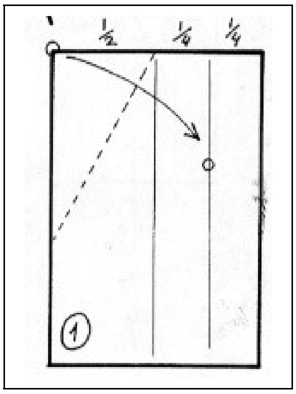
• Facer un estudo sobre as simetrías e sobre as relacións que existen entre a forma das caras de cada un deles e o número de aristas que concurren en cada vértice.

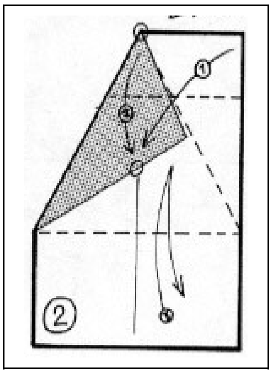
Un exemplo de xogo construtivo é o que plantexamos a continuación, a bisección do sólido platónico con menor número de caras: o tetraedro.

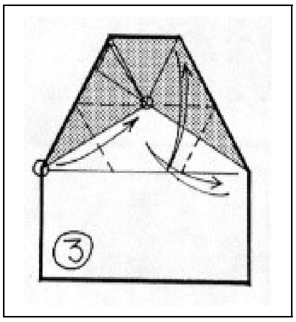
Imos realizar a bisección do tetraedro en dúas pezas usando unicamente dúas follas de papel de formato DIN, ningún corte nin unión con pegamento serán precisos.

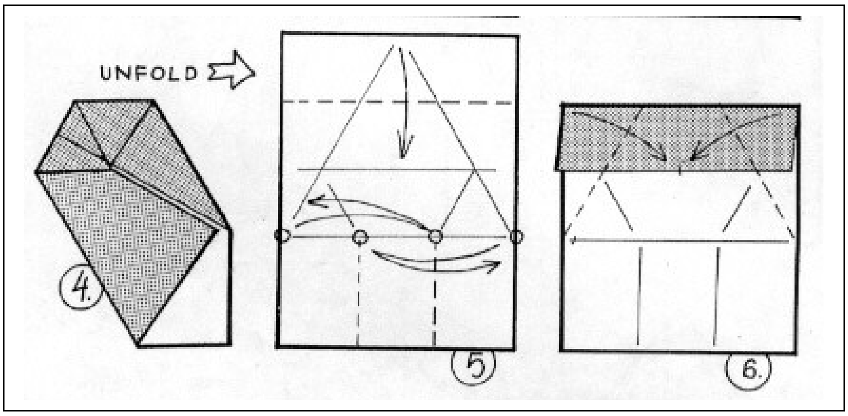
Seguiremos os diagramas de Thoki Yenn Orikata

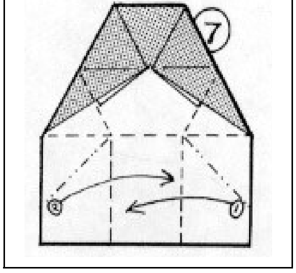
Primeiramente tentaremos facer un triángulo equilátero con vértice no punto medio do lado menor, a partir de aquí queremos facer un hexágono, finalmente este divide o rectángulo inferior en tres partes iguais e a partir de aí dámoslle volume.

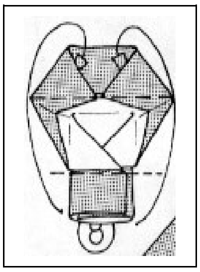

1/2
1/4
1/4
1

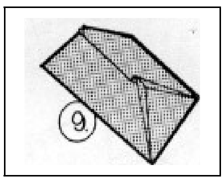

2


3


UNFOLD
4.
5
6.


7


8


9.

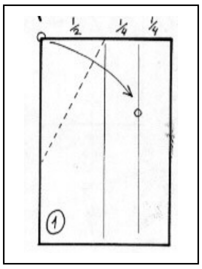
Fanse dúas pezas iguais, o puzzle consiste en formar un tetraedro a partir destas dúas pezas.

Analicemos paso por paso a construción das pezas.

1.- Partimos dunha folla de formato DIN.

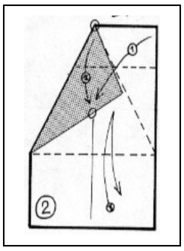
- ¿Que dimensions ten este formato?

2.-



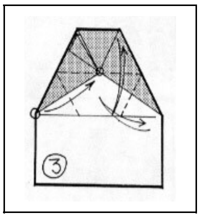
P.- ¿Que ángulo construímos?

3.-



P.-¿Que polígono fixemos? ¿Por que?

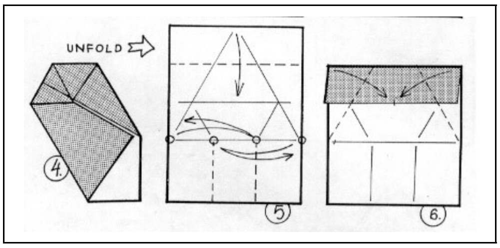
4.-



P.- Fixémonos no trapecio superior ¿Cal é o valor dos seus ángulos superiores?

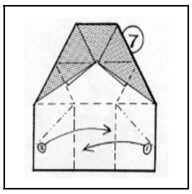
P.-¿Qué polígono fixemos? ¿Por que?

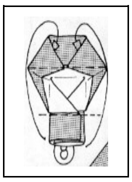
5.-

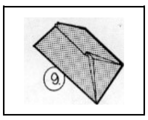


Nos pasos 4,5 e 6 vaise analizando o hexágono e a razón pola que as pregas realizadas nos levan á súa construción.

6.-







Finalmente nos pasos 7,8 e 9 procédese a dar volume á figura.

7.-Repítese o proceso e constrúese unha peza similar.

¿Que tipo de polígonos son as súas caras?

8.- Una vez temos as dúas pezas, plantéxase a actividade de construír con elas un tetraedro.

A solución é máis difícil do que aparenta o planteamento sencillo dun rompecabezas con só dúas pezas. Unha vez conseguido o obxectivo, faise reflexionar ó alumno que o que fixemos foi precisamente resolver o problema que se plantexaba ó inicio da clase.

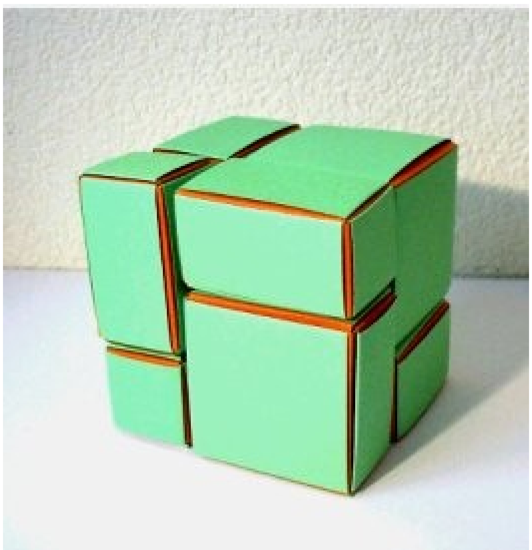
9.- Seguinte actividade: Cálculo do volume dunha peza partindo dun tetraedro de lado 1 unidade.

10.- Actividade 3:Comprobar que dúas veces este volume é o volume do tetraedro.

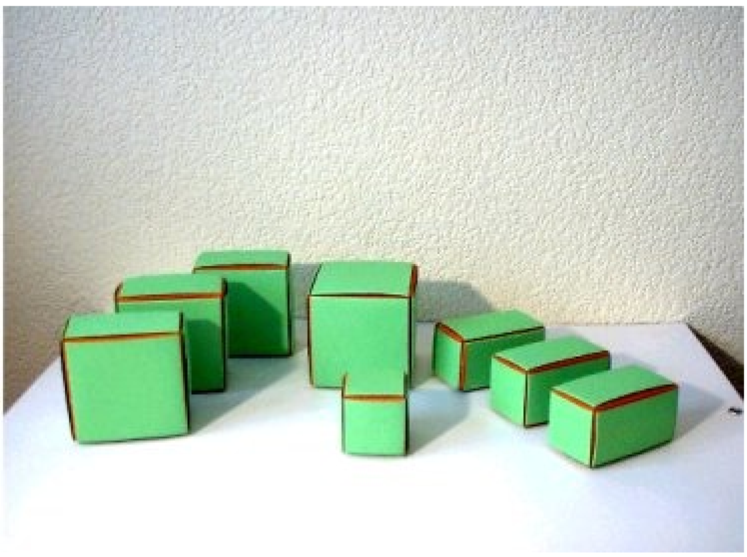
11.- Actividade 4: Facer un estudo das simetrías e do centro de gravidade.

CUBO DO BINOMIO.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3$$



(a+b)³



$a^3 + 3^a\, 2b + 3a\, b^2 + b^3$

O Centro Diffusione Origami (a asociación italiana de papiroflexia) convocou un concurso co lema "Origami Utile". O primeiro premio deste concurso gañouno Paolo Basceta co seu *"cubo di binomio"*. Cada unha das pezas que o compoñen realízase a partir dun rectángulo de papel usando unha técnica para pregar prismas moi coñecida entre os pregadores dende hai anos. Os diagramas publicáronse na revista da asociación italiana o Quadrato Magico nº 28.

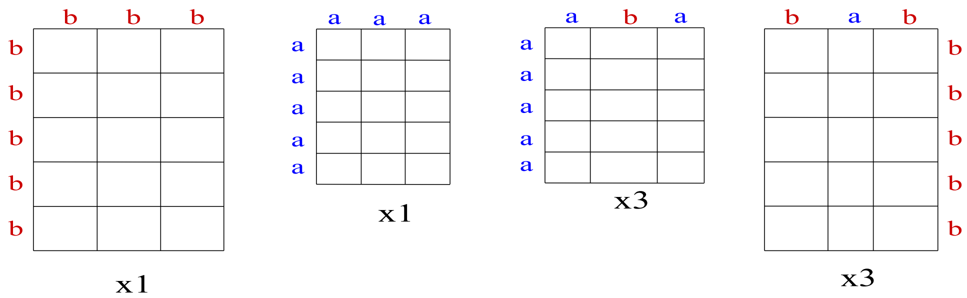
No proceso de pregado de cada elemento utilizarase unha técnica similar que nos servirá para facer un estudo completo de vértices, aristas, caras, relación entre elas e proporcións que gardan. A partir destas relacións poderase facer incidencia en teoremas de equivalencia, Pitágoras, Seno-coseno, simetrías e semellanzas.

Partimos do coñecemento por parte do alumno das seguintes identidades alxebraicas:

- $(\mathrm{a+b})(a-b) = a^2 - b^2$
- $(\mathrm{a+b})^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(\mathrm{a-b})^2 = a^2 - 2ab + b^2$

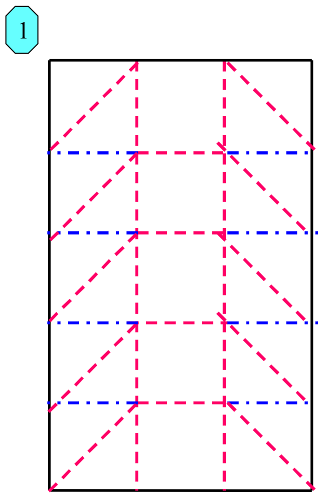
Seguiremos a técnica de Bascetta na elaboración das 8 pezas que forman o “crebacabezas”.

Facemos ós alumnos a seguinte proposta: imos construír un puzzle de oito pezas, o papel necesario ten que ter as dimensións seguintes:

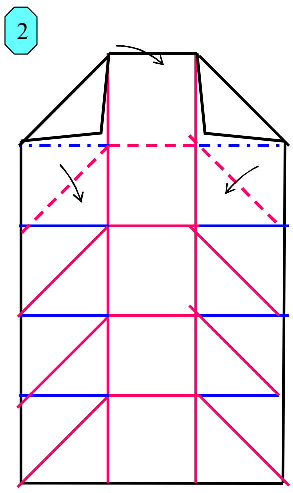


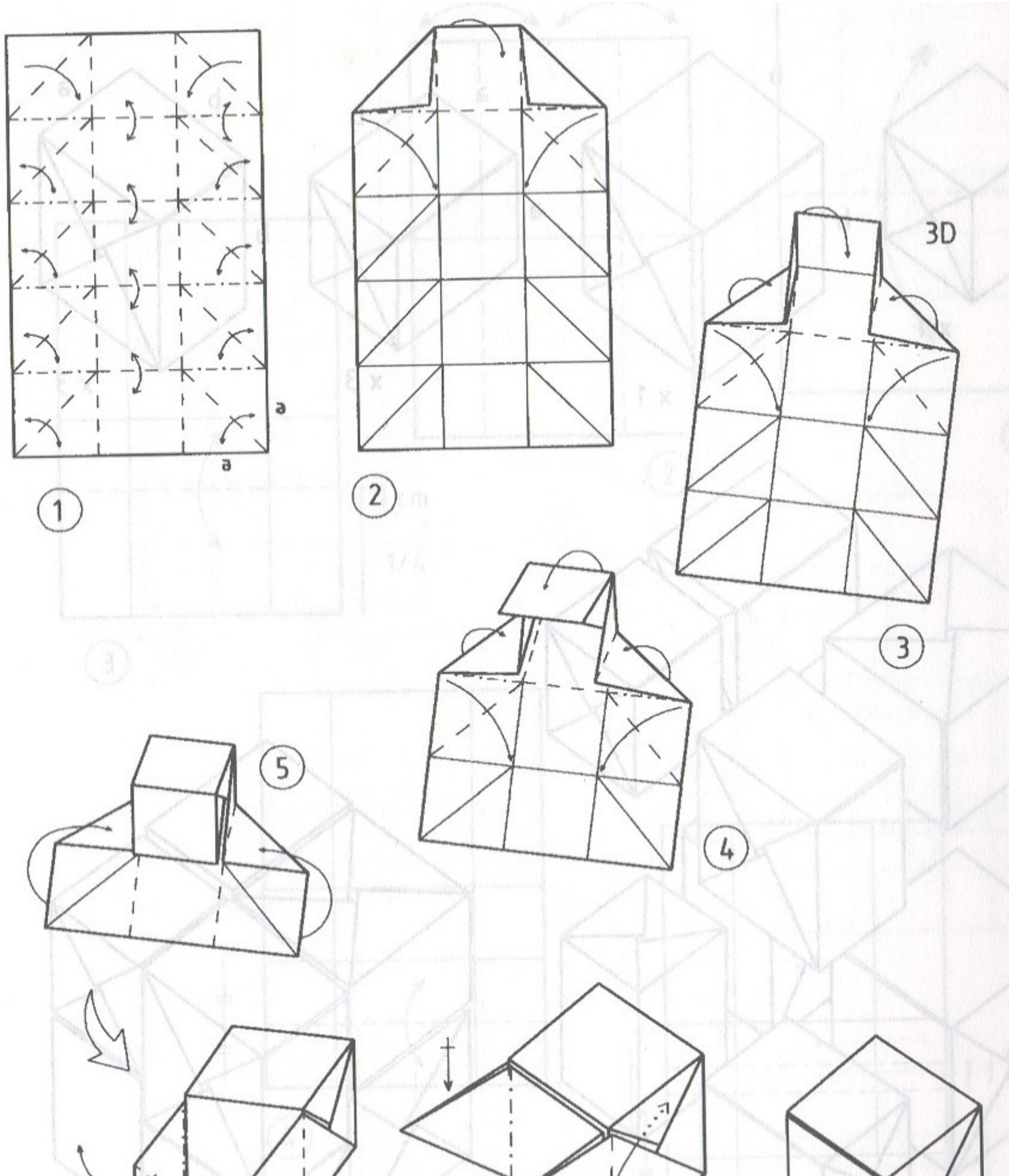
Traen o papel preparado e contruímos as 8 pezas

Mapa de cicatrices



Método de pregado





Unha vez rematadas as pezas teñen que construír un cubo con elas.

Planteanselle as seguintes preguntas:

- ¿Que diferencia atopas entre as pezas?

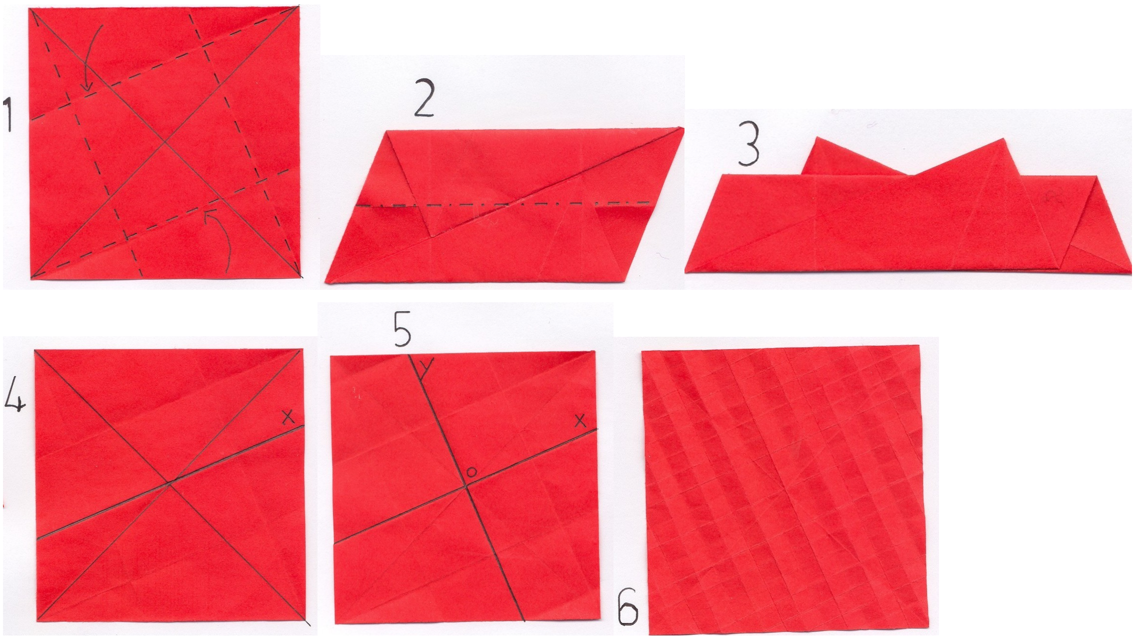
- ¿Cantas medidas distintas hai entre as aristas das pezas?.
- Clasifica as pezas: 1 cubo grande, un cubo máis pequeno, 6 prismas: tres dun tamaño y tres doutro.
- ¿Cales son as dimensións do cubo grande?
- ¿Atopas algunha relación entre os lados das pezas e o lado do cubo grande?.
- Mándaselles calcular as áreas das figuras obtidas
- Mándaselles calcular os volumes de tódalas pezas e faise un estudo comparativo.

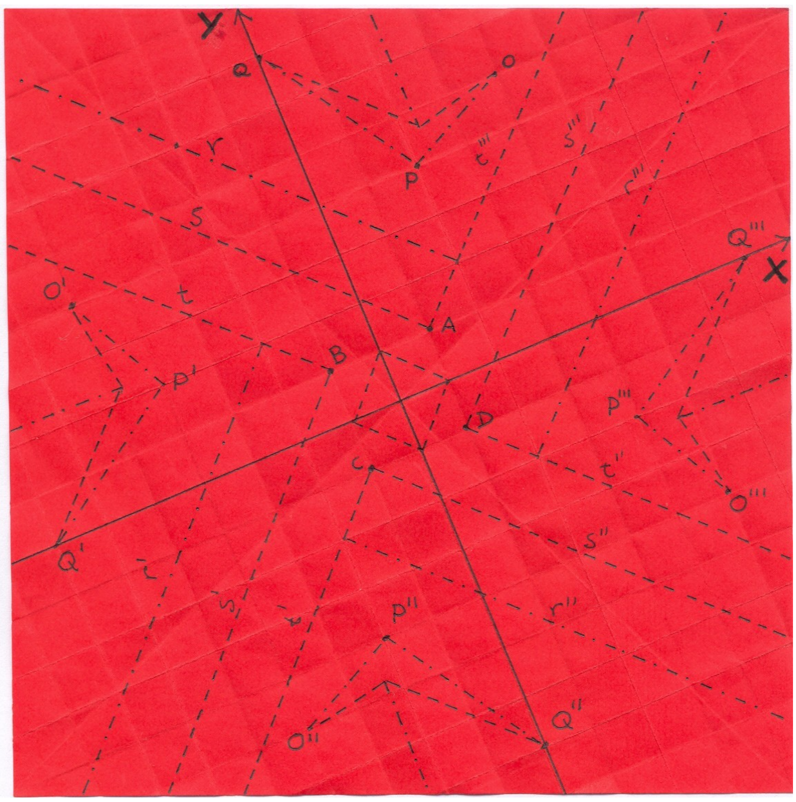
Faise a continuación unha caixa cadrada para gardar as pezas de dimensións a+b, pídeselle tamén ós alumnos que calculen o seu volume

Se as oito pezas as metemos na caixa obtemos a seguinte igualdade:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3$$

ROSA DE KAWASAKI





Este é o mapa de cicatrices da rosa de Kawasaki. Unha rosa fermosa pero difícil de pregar, imos facer un pequeno estudo matemático a partir das súas dobras (mapa de cicatrices), para así familiarizarnos con ela e terminar pregándoa sen moita dificultade.

Para poder facer esas marcas, previamente fíxose no papel unha trama perpendicular como amosan os diagramas:

Márcanse as diagonais, a continuación fanse as bisectrices como ilustran as figuras 1,2,3, despois faise a trama dividindo en dezaseisavos, tanto horizontal como verticalmente, figura 6.

Se consideramos un sistema de coordenadas con orixe no centro do cuadrado e como eixos de coordenadas X e Y como amosa a imaxe 5 podemos intentar resolver as seguintes cuestións:

Respecto á escuadra do papel cántos graos están xirados os eixos de coordenadas (suxírese ó alumno que colla un cadrado de papel e dobre tratando de ver así as solucions ás cuestions)

¿Cales son as coordenadas dos puntos A,B,C e D?

¿Observas alguha simetría?

Coordenadas dos puntos P,O,Q; P'O'Q'; P''O'Q'' Y P'''O'''Q'''.

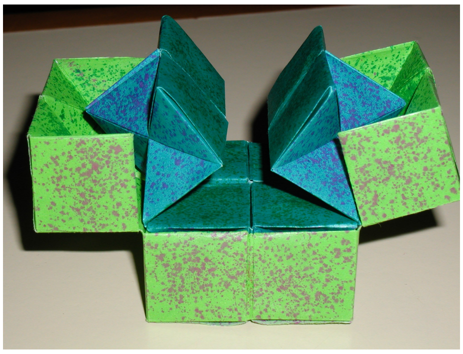
Se nos movemos pola trama da seguiente maneira: para ir dun punto a outro contamos os pasos (nós da trama) que damos á dereita considerámolos positivos á esquerda negativos arriba (positivos) abaixo (negativos). ¿Que movemento facemos para marcar os polígonos que pasan por POQ, P'O'Q' etc

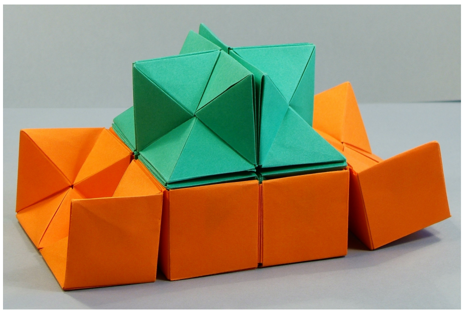
Escribe a ecuación das semirrectas r,s,t; r´,s',t' etc. ¿cal é a súa pendente? ¿Como son entre si cada trío?

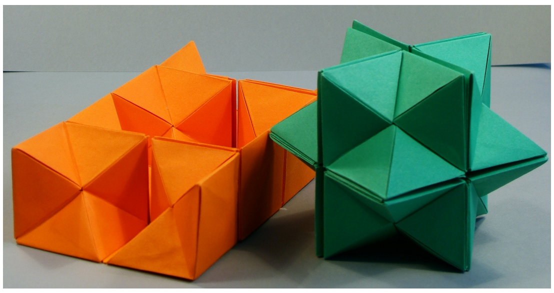
¿Que relación hai entre a área do cadrado ABCD e o inscrito marcado?

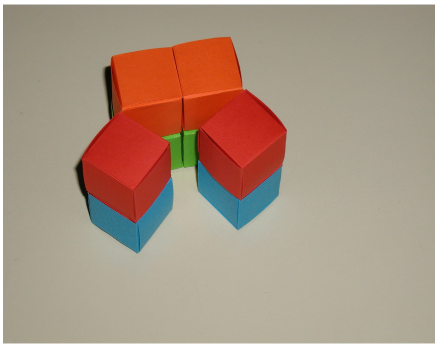
Observamos que ó xirar o cadrado en cada cadrante repítense os mesmos pasos. É simétrica

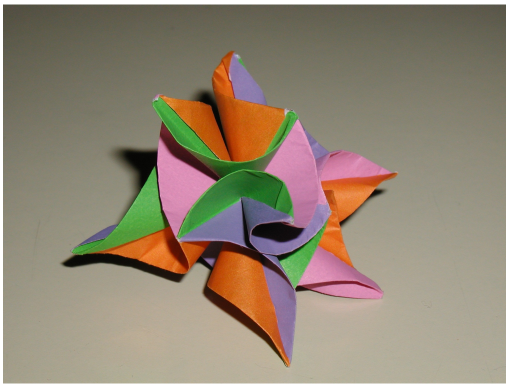
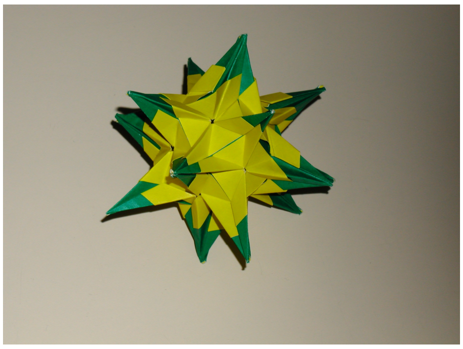
FOTOS FIGURAS

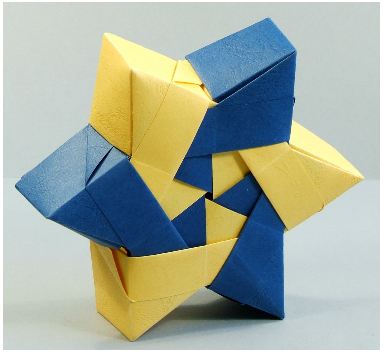


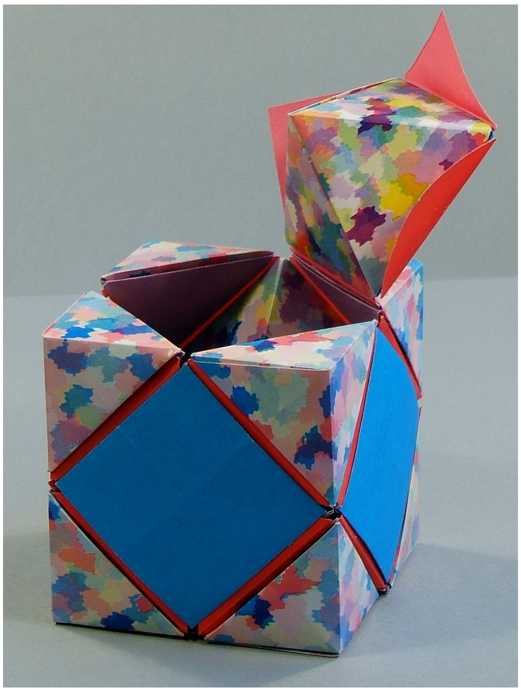


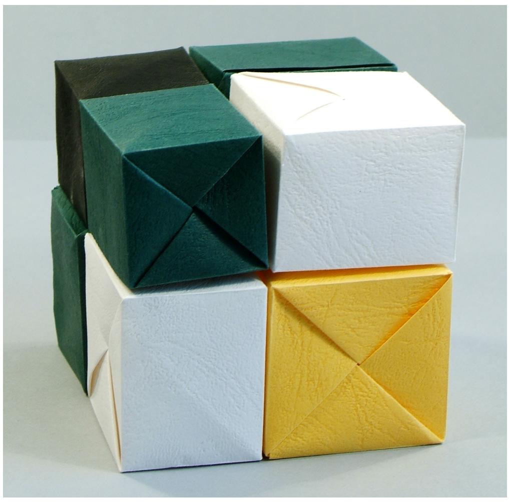


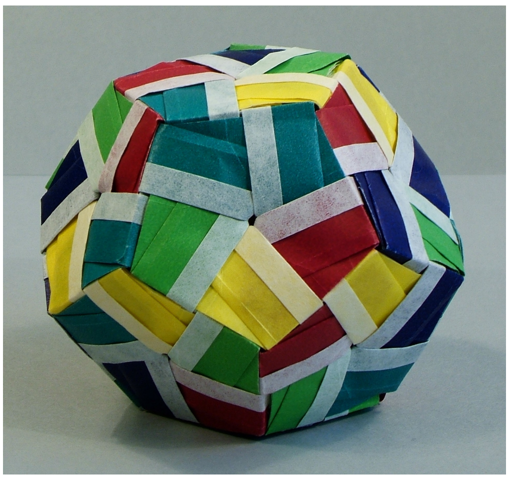


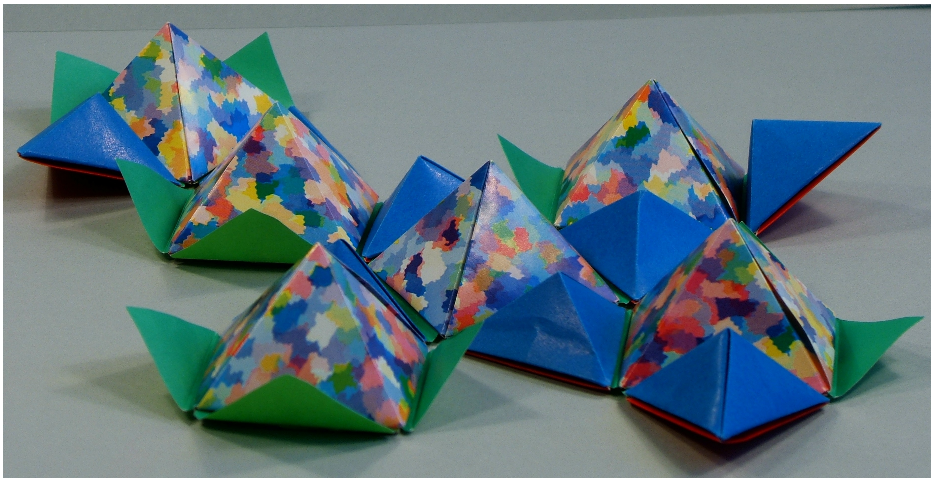




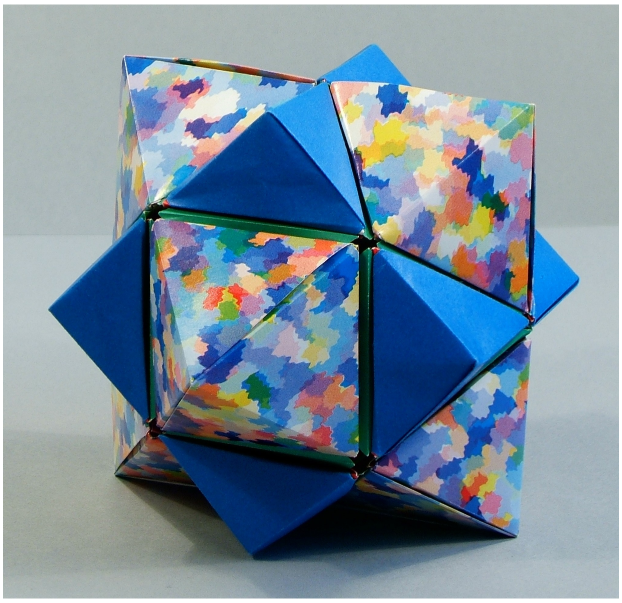












ÍNDICE: