

# RESUMEN DE CONTENIDOS



## Índice

¡Fluye!.....	2
Lenguaje algebraico.....	2
Operaciones con polinomios.....	2
Suma y resta.....	2
Multiplicación.....	2
Potencia.....	3
Identidades notables.....	3
División.....	3
Algoritmo de la división de polinomios.....	3
Regla de Ruffini o división sintética.....	4
Teorema del resto.....	5
Teorema del factor.....	5
Factorización de polinomios.....	5

## ¡Fluye!

Con este resumen tendrás los conocimientos básicos de polinomios.

## Lenguaje algebraico

Aquí tienes algunas definiciones que debes conocer.

- **Variables:** son letras que representan cantidades desconocidas. Su valor cambia según el contexto. Las más comunes son “x”, “y”, “z”...
- **Monomio:** es una expresión algebraica formada solo por el producto de números y letras (variables). Si las letras tienen exponentes, estos deben ser números naturales. Ejemplos:  $5x^2y$ ;  $-4x^2y...$

Dos monomios se dice que son **semejantes** si tienen la misma parte literal. Los dos ejemplos anteriores son semejantes.

- **Polinomio:** es la suma o resta de varios monomios. Cada uno de los monomios que lo forman también se pueden llamar términos.
- **El grado** del polinomio es el grado más alto de los términos que lo forman. En el ejemplo anterior sería  $2 + 1 = 3$ , (2 es el grado de x, 1 es el grado de y).
- **Valor numérico:** es el resultado de sustituir en una expresión algebraica las letras por números.

Por ejemplo: para el polinomio  $P(x) = x^3 - 5x$  el valor numérico si  $x=2$  es

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 = -2$$

## Operaciones con polinomios

### Suma y resta

Solo se pueden sumar o restar los monomios que son semejantes. Hay que tener especial cuidado al deshacer los paréntesis cuando operamos con polinomios.

Por ejemplo: dados  $P(x) = x^2 - x$  y  $Q(x) = x^3 - 2x + 1$

$$P(x) + Q(x) = (x^2 - x) + (x^3 - 2x + 1) = x^2 - x + x^3 - 2x + 1 = x^3 + x^2 - 3x + 1$$

### Multiplicación

En el producto de monomios se multiplican coeficientes entre sí y partes literales entre sí.

Por ejemplo:  $2x^3y \cdot \frac{3}{4}x^4y^2z = \left(2 \cdot \frac{3}{4}\right)(x^3y \cdot x^4y^2z) = \frac{2 \cdot 3}{4}x^{3+4}y^{1+2}z = \frac{3}{2}x^7y^3z$

En el producto de dos polinomios, cada término de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro. Después, se suman o restan los monomios semejantes y se reordenan los términos.

Por ejemplo: dados  $P(x)=x^2-x$  y  $Q(x)=x^3-2x+1$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2-x) \cdot (x^3-2x+1) = x^2(x^3-2x+1) - x(x^3-2x+1) = \\ &= x^5-2x^3+x^2-x^4+2x^2-x = x^5-x^4-2x^3+3x^2-x \end{aligned}$$

## Potencia

Una potencia es una multiplicación de un término por sí mismo tantas veces como indica su exponente.

Ejemplo:  $(2x^3y)^2 = 2^2(x^3)^2y^2 = 4x^6y^2$ .

Ejemplo:  $(x^3-2x+1)^2 = (x^3-2x+1) \cdot (x^3-2x+1)$  y bastará con multiplicar el polinomio por sí mismo tantas veces como indique el exponente.

## Identidades notables

Son:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$  Por ejemplo:  $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow$  Por ejemplo:  $(3x-1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$  Por ejemplo:  $(3x^2-4)(3x^2+4) = (3x^2)^2 - 4^2 = 9x^4 - 16$

## División

En la división de monomios se dividen coeficientes entre sí y partes literales entre sí.

Por ejemplo:  $\frac{2x^4y^2}{4x^3y} = \frac{xy}{2}$

Observa que puede ocurrir que el resultado de la división no sea un monomio. Esto sucede si el exponente de alguna letra del divisor es mayor que el de su correspondiente del dividendo.

## Algoritmo de la división de polinomios

### INICIO DEL ALGORITMO

- **PASO 1:** elige el primer monomio del dividendo y el primer monomio del divisor y divídelos.
- **PASO 2:** escribe el resultado de la división en el cociente y multiplícalo por cada uno de los términos del divisor.

- **PASO 3:** escribe el resultado de la multiplicación en el dividendo y resta las dos expresiones anteriores.
- **PASO 4:** compara el grado del resultado con el grado del divisor, si es menor la división ha terminado, en otro caso repite los pasos 1, 2 y 3.

## FIN DEL ALGORITMO

**Ejemplo:** calcular  $(2x^3 - x^2 - 8x - 2) : (2x + 3)$

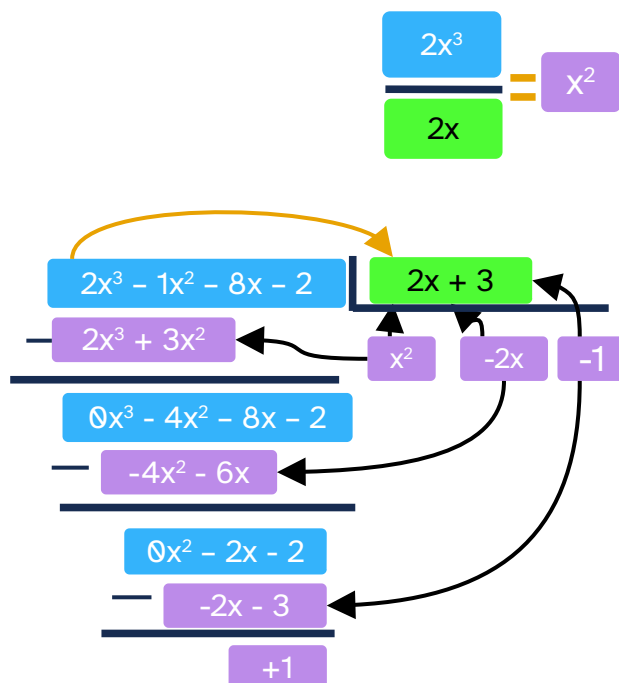
## INICIO DEL ALGORITMO

- 1: divide  $(2x^3) : (2x) = x^2$
- 2: multiplica  $(x^2) \cdot (2x + 3) = (2x^3 + 3x^2)$
- 3: resta  $(2x^3 - x^2 - 8x - 2) - (2x^3 + 3x^2) = (-4x^2 - 8x - 2)$ .
- 4: ¿ $G(-4x^2 - 8x - 2) < G(2x + 3)$ ? no, ya que  $2 > 1$ .

Repetimos los pasos 1, 2 y 3 con  $(-4x^2 - 8x - 2)$ .

**Solución:** el cociente es  $x^2 - 2x - 1$ ; el resto es 1.

Se puede cambiar la resta del paso 3 por una suma si, al resultado del paso 2 se le cambia el signo.



## Regla de Ruffini o división sintética.

Se trata de un método más breve para realizar la división cuando el divisor es de la forma  $(x \pm n^\circ)$ . Es muy útil cuando los coeficientes son enteros. Permite hallar el cociente y el resto rápidamente, sin escribir las variables, lo que ahorra tiempo.

El procedimiento puedes verlo a través de este ejemplo:

Divide  $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$  entre  $(x + 2)$

1. Escribe en la primera fila los coeficientes de  $P(x)$ .
2. Escribe a la izquierda la raíz de  $(x+2)$ , que es  $(-2)$ .
3. Baja el primer número de la primera fila, (2).
4. Multiplica (2) por  $(-2)$  y escribe el resultado bajo el 5 y súmalos.
5. Repite el **paso 4**, con cada número de la tercera fila, hasta completar la tabla.

P(x)	2	5	-1	-6
-2		-4	-2	6
	2	1	-3	0

La solución está en la tercera fila:  $C(x) = (2x^2 + x - 3)$  y el resto es 0

Observa que, si pones 2 en lugar de -2, en el paso 4 tendrías que restar. El cambio de signo cambia la resta por una suma y hace que el algoritmo sea más sencillo.

## Teorema del resto

Este teorema conecta **el resto de la división de un polinomio entre  $(x-a)$  con su valor numérico en  $x = a$ .**

El resto  $R$  de la división de un polinomio  $P(x)$  entre  $(x - a)$  es igual al valor numérico del polinomio en  $x = a$ , es decir,  $R = P(a)$ .

Dicho de otro modo, un polinomio  $P(x)$  es divisible entre  $(x - a)$  si  $P(a) = 0$ ;  $(x - a)$  sería en este caso un divisor de  $P(x)$ .

## Teorema del factor

Este teorema conecta **la raíz “a” de un polinomio con el factor  $(x-a)$ .**

$$P(a) = 0 \text{ si y solo si } (x - a) \text{ es un factor.}$$

Dicho de otro modo:  $P(a) = 0$  si y solo si  $P(x) : (x - a)$  es exacta.

Es decir,  $(x - a)$  sería en este caso un divisor de  $P(x)$ .

En este caso,  $P(x)$  se puede escribir de la forma  $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$ .

## Factorización de polinomios

Un polinomio es **irreducible** si no se puede escribir como producto de dos o más polinomios de grado menor.

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de dos o más polinomios.

La situación ideal es que los factores sean de grado 1 aunque, igual que ocurre cuando factorizas un número, no siempre se consigue.

Para factorizar polinomios se pueden utilizar distintos métodos o combinaciones de ellos:

- Extracción de factor común.
- Uso de las identidades notables.
- Uso de las ecuaciones de segundo grado.
- División normal o sintética (Regla de Ruffini).
- Teorema del resto.

Como acabas de ver, para factorizar  $P(x)$ , una vez que tienes una raíz “a”, tienes que dividir y hallar el cociente  $C(x)$ . La factorización es  $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$ .

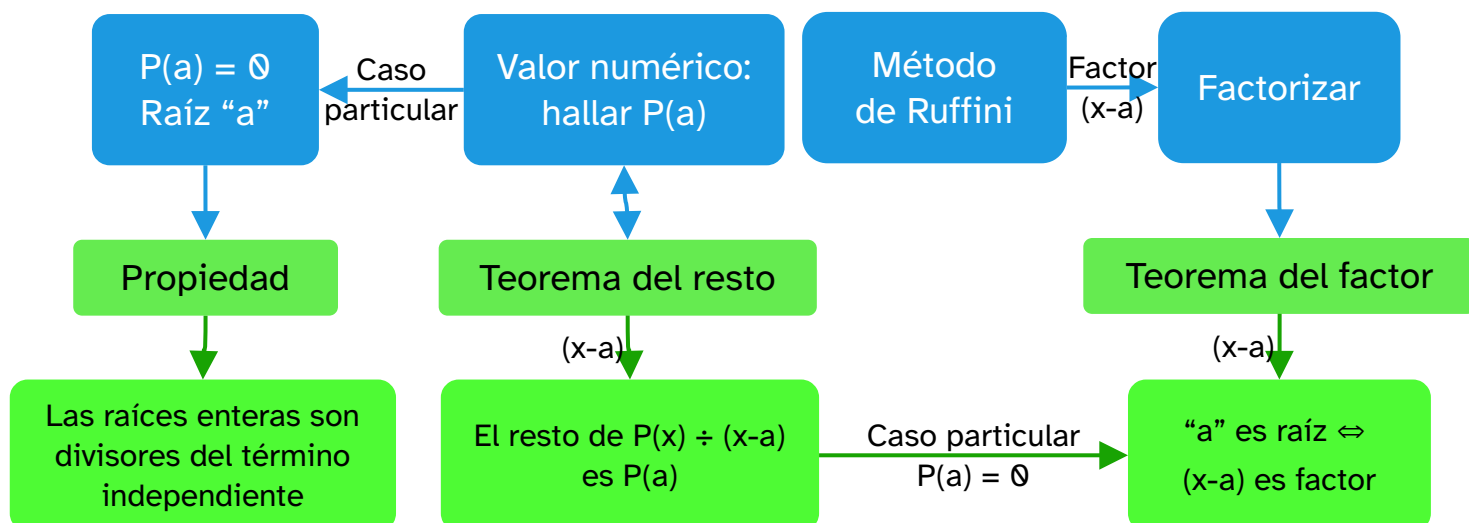
**Si continuas el proceso hasta completar tantas raíces como su grado, tendrás la factorización más completa.**

### Generalización:

Si un polinomio  $P(x)$  es de grado  $n$  tiene  $n$  raíces  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , además, si  $a_n$  es el coeficiente del término de mayor grado,  $P(x)$  puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Este es el esquema de las propiedades anteriores, que permiten factorizar un polinomio.



Si  $a_n$  es el coeficiente de  $x^n$ , y  $r_1, r_2, \dots$  son las raíces, entonces:  $P(x) = a_n (x-r_1) \cdot (x-r_2) \dots (x-r_n)$