

RESUMEN DE CONTENIDOS



Índice

¡Math & Rock!.....	2
Proporcionalidad.....	2
Definiciones.....	2
Tipos de proporcionalidad.....	2
Matemática financiera.....	3
Definiciones.....	3
Porcentaje.....	3
Variación porcentual.....	3
Índice de variación.....	3
Índice de variación total.....	4
Interés.....	4
Tipos de interés.....	4
Sucesiones.....	5
Definiciones.....	5
Tipos de sucesiones.....	5
Progresiones aritméticas.....	5
Progresiones geométricas.....	5
Sucesiones en el Triángulo de Tartaglia o de Pascal.....	6
Combinatoria.....	6
Número factorial: permutaciones de n elementos.....	6
Número de variaciones de n elementos tomados de k en k.....	6
Número de combinaciones de n elementos tomados de k en k.....	7
Sucesiones en el Triángulo de Tartaglia o Combinatorio.....	7

¡Math & Rock!

Con este resumen tendrás los conocimientos básicos de proporcionalidad y sucesiones.

Proporcionalidad

Definiciones

Razón: es el cociente entre dos números a y b : $\frac{a}{b}$

Proporción: es la igualdad entre dos razones, cuyos 4 términos se llaman extremos a y d , y medios, b y c . $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Magnitud: es cualquier propiedad que pueda medirse mediante un número.

Relación de proporcionalidad o propiedad fundamental: En las proporciones se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Tipos de proporcionalidad

Proporcionalidad directa: dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número distinto de cero, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Dicho de otra forma: Cuando una magnitud aumenta, la otra aumenta en la misma proporción o viceversa.

La relación directa puede expresarse como: $\frac{a}{b} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Proporcionalidad inversa: dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número distinto de cero, la otra queda dividida o multiplicada respectivamente por el mismo número.

Dicho de otra forma: Cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma proporción o viceversa.

La relación inversa puede expresarse como: $a \cdot b = k$, donde k es una constante.

Repartos proporcionales: Los repartos proporcionales surgen de situaciones donde es necesario repartir una cantidad total entre varias partes siguiendo una determinada proporcionalidad.

Para realizar repartos **directamente proporcionales** de una cantidad N , a a, b, c, \dots se calcula la constante de proporcionalidad directa $r = \frac{N}{a+b+c+\dots}$ y se multiplica por a, b, c, \dots

Para realizar repartos **inversamente proporcionales** de una cantidad N , a a, b, c, \dots repartimos esa misma cantidad de forma directamente proporcional a sus inversos, es decir, a los números $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$

Proporcionalidad compuesta: Implica la existencia de más de dos magnitudes interrelacionadas. Combina las características de la proporcionalidad directa e inversa. Se compara la magnitud desconocida con las demás, para determinar si la relación es de proporcionalidad directa o inversa.

En el caso de que una de ellas sea inversa se invierte esa razón y se trata como si fuese directa.

Ejemplo: Para montar el escenario del "¡Math & Rock!", **6 personas** tardan **4 días** trabajando **8 horas diarias**. Si se quiere montar en 3 días trabajando 10 horas, ¿cuántas personas se necesitan?

Solución: Las razones son: $\frac{6}{x}$, personas, $\frac{4}{3}$, días, $\frac{8}{10}$, horas diarias.

Al tratarse de dos pares de magnitudes inversas, se invierten las razones: $\frac{6}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{8}$

Matemática financiera

Definiciones

Porcentaje

Es una razón de proporcionalidad referida a 100 unidades. Ejemplo: 5 % significa $\frac{5}{100}$.

Variación porcentual

Es el cambio que experimenta una cantidad expresado en forma de porcentaje, es decir, es un indicador que muestra cuánto ha variado el valor de manera porcentual.

Índice de variación

Es el tanto por cien expresado como decimal, al que se le suma o resta 1.

Por ejemplo, el índice de variación del 5 % se expresa como 0,05 y luego, si es un aumento, se indica como 1,05 y, si es una disminución, como 0,95.

Como acabas de ver, este número es:

- mayor que 1 si se trata de aumentos: $I_v = 1 + \frac{\text{porcentaje}}{100}$
- menor que 1 si se trata de descuentos o disminución: $I_v = 1 - \frac{\text{porcentaje}}{100}$

Con este índice se calcula de forma fácil cualquier aumento o descuento.

Como fórmula, se indica así:

$C_i \cdot I_v = C_f$ donde C_i es la cantidad inicial y C_f la cantidad final.

Índice de variación total

Cuando a una determinada cantidad se le aplican sucesivos porcentajes, el índice de variación total se obtiene multiplicando los índices de variación de los sucesivos porcentajes encadenados.

Este valor se aplica en la siguiente fórmula: $C_i \cdot I_{vt} = C_f$ donde C_i es la cantidad inicial, C_f la cantidad final e $I_{vt} = I_{v1} \cdot I_{v2} \dots$ (el producto de tantos índices de variación como porcentajes sucesivos haya).

Interés

Es la cantidad de dinero que una entidad financiera paga por disponer del dinero de tus ahorros.

Tipos de interés

Simple

Se calcula siempre sobre la cantidad inicial. Los beneficios no se acumulan, por lo que cada año se gana la misma cantidad fija.

La fórmula es: $C_f = C_i + \frac{C_i \cdot r \cdot t}{100}$ donde r es el rédito anual (%) y t el tiempo. Esta fórmula

corresponde con una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{C_i \cdot r \cdot t}{100}$.

Interés compuesto

Los intereses que se generan al final de año se añaden a la cantidad inicial. Así, al año siguiente, el banco calcula los nuevos beneficios sobre ese total acumulado (capital + intereses previos).

La fórmula es: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ donde r es el rédito anual (%) y t el tiempo. Esta fórmula

corresponde con una progresión geométrica de razón $r = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Sucesiones

Definiciones

Aquí tienes algunas definiciones que debes conocer.

- **Sucesión:** lista ordenada de números que siguen un patrón.

Existen muchos tipos de sucesiones, algunas ya las conoces como la sucesión de los números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

- **Término:** cada uno de los números que forman la sucesión.
- **Término general:** expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término a partir de la posición que ocupa. No todas las sucesiones tienen término general.
- **Ley de recurrencia:** expresión algebraica que permite calcular un término a partir de los anteriores.

Tipos de sucesiones

Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética o sucesión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo **d**, llamado **diferencia**, es decir,

$$a_n = a_{n-1} + d$$

El **término general** de la progresión aritmética de primer término **a₁** y diferencia **d** es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

La **suma** de los **n primeros** términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior un número fijo **r**, llamado **razón**, es decir,

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

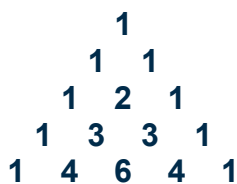
El **término general** de la progresión geométrica de primer término **a₁** y razón **r** es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

La **suma** de los **n primeros** términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Sucesiones en el Triángulo de Tartaglia o de Pascal



El triángulo de Tartaglia o de Pascal es una representación

matemática de números enteros ordenados con forma triangular.

Su nombre se debe a los matemáticos famosos que la estudiaron.

Comienza por un 1 en la primera fila, en la segunda también 1 y 1 y, a partir de ahí, cada número se obtiene de sumar los dos que tiene sobre él.

Este triángulo tiene infinitas filas, pero lo más interesante está en sus diagonales, ya que se van formando sucesiones muy famosas:

- En la primera diagonal puedes ver la **sucesión constante** formada por el 1: {1, 1, ...}
- En la segunda diagonal puedes ver la sucesión de los números naturales: {1, 2, 3, ...}
- En la tercera diagonal puedes ver la sucesión de los números triangulares: {1, 3, 6, ...}; y así sucesivamente.

Por otra parte, estos números son muy importantes para resolver problemas que guardan relación con el recuento de casos, problemas de combinatoria.

Combinatoria

La combinatoria es una parte de las matemáticas que estudia las selecciones, ordenadas o no, de los elementos de un conjunto.

Su fórmula base es la que se usa para las ordenaciones, la del **número factorial**.

Número factorial: permutaciones de n elementos

Se escribe con un signo de exclamación y consiste en multiplicar un número por todos los naturales anteriores hasta llegar al 1: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Se usa para calcular las ordenaciones de n elementos, que también se llaman

permutaciones: $P_n = n!$

Por convenio, el factorial de cero es uno: $0! = 1$.

A partir de esta expresión, se obtienen otras dos, la de las variaciones y la de las combinaciones.

Número de variaciones de n elementos tomados de k en k

Son ordenaciones de parte de los elementos de un conjunto.

Para calcularlas se usa la fórmula anterior, dividida entre el número de las ordenaciones de

elementos no elegidos: $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Ejemplo: Para el festival se han presentado **10 bandas** de rock locales. El jurado tiene que elegir solo a **3 bandas** para darles el 1er, 2º y 3er premio. ¿De cuántas formas se pueden repartir estos premios? $V_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ **podios posibles**.

Número de combinaciones de n elementos tomados de k en k

Son agrupaciones sin ordenar de parte de los elementos de un conjunto.

A partir de la fórmula anterior, se elimina el número de todas las ordenaciones, tanto de los elementos elegidos como de los que no. Se indica con un paréntesis con dos números, uno encima del otro; el de arriba es el de elementos que hay y el de abajo, el de los que se eligen:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Si la fórmula te parece difícil, usa la calculadora; la expresión de las combinaciones suele estar en la tecla de dividir, como función secundaria.

Un ejemplo de la vida cotidiana es el número de combinaciones de resultados de la lotería primitiva, en la que tienes 49 números y eliges 6: $C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!}$.

Sucesiones en el Triángulo de Tartaglia o Combinatorio

Volviendo al triángulo, observa que sus valores son los de los números combinatorios, por eso también recibe este nombre.

Si fijas el valor de k (la posición en la fila) y vas variando la n (la fila), obtienes sucesiones anteriores:

- **Sucesión de naturales k = 1:** $\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Sucesión de números triangulares, k = 2:** $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2} = \{1, 3, 6, \dots\}$

Estudiarás combinatoria con más detalle en el tema de probabilidad, pero será el próximo curso cuando realmente entres a fondo en esta interesante parte de las matemáticas.



“Resumen de contenidos: ¡Math & Rock!”, del proxecto cREAgal, se publica con la [Licencia Creative Commons Reconocimiento No-comercial Compartir igual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)