Unidad Central de Operaciones (UCO)

Índice

Fracciones y su interpretación

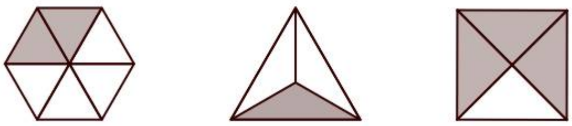
Definiciones

1. **Fracción**: Cociente indicado de números enteros.
2. **Fracción propia**: Fracción que tiene el numerador menor que el denominador y, por consiguiente, es menor que la unidad.
3. **Fracción impropia**: Fracción cuyo numerador es mayor que el denominador y, por consiguiente, es mayor que la unidad.

Interpretaciones de una fracción

Una parte de la unidad

Una **fracción** puede ser una o varias de las partes en las que se divide una **unidad**. Por ejemplo, la parte coloreada de las siguientes figuras se representa por las fracciones que las acompañan:



$\frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}$

El **denominador** indica las partes iguales en las que se divide la unidad.

El **numerador** indica cuántas de esas partes estamos considerando.

Antes de continuar, fíjate bien en las tres fracciones del ejemplo, **¿podrías expresar alguna de ellas de otra forma?**

Un operador

Una **fracción** se puede interpretar como un **operador** que actúa sobre una cantidad: multiplica por el numerador y divide entre el denominador. Por ejemplo, para calcular las dos quintas partes de 100 € haríamos lo siguiente:

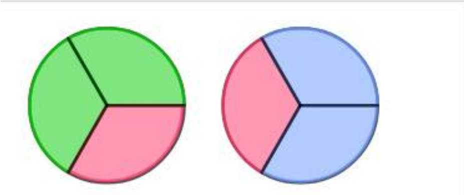
$$\frac{2}{5}\,de\,100=\frac{2*100}{5}=\frac{200}{5}=40\,€$$

¿Qué estamos haciendo en realidad? Estamos **multiplicando** la fracción por la cantidad.

$$\frac{2}{5}*100=\frac{2*100}{5}=\frac{200}{5}=40\,€$$

Una división indicada

Una **fracción** es la forma *exacta* de indicar la **división** del numerador entre el denominador. Por ejemplo, si tengo que dividir 2 pasteles entre 3 niñas, la situación sería la siguiente:



Cada una de las niñas recibe exactamente dos tercios de pastel. Sin embargo, si hiciésemos la división entre 2 y 3 obtendríamos 0,6666666… **¿Cómo haríamos para cortar esa cantidad exacta de pastel? ¿Sería posible?**

Otras veces se usa la fracción en lugar del resultado de la división por costumbre, aunque el cociente sea más sencillo. Por ejemplo, se habla de una botella de tres cuartos de litro, en lugar de 0,75 litros.

$$\frac{3}{4}=0{,}75\,L=75\,cl$$

¡OJO! El **denominador** de una fracción ha de ser un número **distinto de cero**.

Otra forma de indicar las fracciones impropias

Ya sabemos que las fracciones impropias son mayores que la unidad. Por ejemplo, si consideramos la fracción $\frac{11}{4}$ y hacemos la división correspondiente, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Es decir, al dividir 11 entre 4 obtenemos un cociente entero de 2 unidades y un resto de 3, que tendríamos que dividir entre el divisor, 4. Pues bien, las fracciones nos ayudan a representar esta situación muy fácilmente: $\frac{11}{4}=2+\frac{3}{4}$

¿Qué son los números mixtos?

En el apartado anterior has visto otra forma de expresar las fracciones impropias como la suma de un número entero y una fracción propia. Son los llamados "números mixtos".

Por ejemplo, la fracción $\frac{8}{3}$ la podemos expresar como $2+\frac{2}{3}$ que es un número mixto.

Comparando fracciones

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma cantidad. Por ejemplo, $\frac{1}{2} y \frac{3}{6}$ son equivalentes porque ambas valen 0,5.

Si dos fracciones son equivalentes, cumplen la siguiente **propiedad**: "*El producto de sus extremos coincide con el producto de sus medios*". ¿Y qué quiere decir eso? Pues que si multiplicas el numerador de la primera por el denominador de la segunda, el resultado coincide con el de la multiplicación del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

¡Uff! ¡Menudo trabalenguas! En realidad, es más sencillo hacerlo que explicarlo:

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6} \Rightarrow 1*6=2*3$$

¿Y cómo se consiguen fracciones equivalentes de una dada? Si me dan, por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ y quiero obtener fracciones equivalentes a ella, multiplico el numerador y el denominador por la misma cantidad. Veamos cómo funciona:

$$\frac{1}{2}=\frac{1*2}{2*2}=\frac{2}{4}=\frac{2*7}{4*7}=\frac{14}{28}=\ldots$$

Simplificar fracciones

Ya sabemos cómo obtener fracciones equivalentes. Es muy fácil, sin embargo, cada vez que vamos multiplicando el numerador y el denominador, parece que el resultado se va "complicando". Cada vez las cantidades del numerador y del denominador son más grandes.

Por eso es interesante tener un método para **simplificar fracciones**. Eso sí, garantizando que la fracción resultante tiene el mismo valor que la inicial, es decir, que son fracciones **equivalentes**.

Para **simplificar fracciones** tenemos que dividir el numerador y el denominador por la misma cantidad. Por ejemplo, si queremos simplificar la fracción $\frac{2}{6}$ hay que escoger un número que sea divisor de ambos para que el resultado sea exacto. En este caso, nos sirve el 2. Veamos cómo queda:

$$\frac{2}{6}=\frac{2 \div 2}{6 \div 2}=\frac{1}{3}$$

Escoger bien la cantidad que emplearemos como divisor es importante para hacer el proceso más corto. Por ejemplo, para simplificar la fracción $\frac{21}{42}$, podemos dividir por el mcd (21,42)=21

$$\frac{21}{42}=\frac{21 \div 21}{42 \div 21}=\frac{1}{2}$$

Fracción irreducible

Una **fracción irreducible** es aquella que no se puede simplificar, es decir, no podemos encontrar un número distinto de 1 que sea divisor del numerador y del denominador. Por tanto, en las fracciones irreducibles, el numerador y el denominador son *primos entre sí*.

Algunos ejemplos de fracciones irreducibles son: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{12}{5}$ o $\frac{3}{8}$

El diagrama de Freudenthal

El cuadro representa el "Diagrama de Freudenthal". Es un cuadro dedicado a las fracciones:

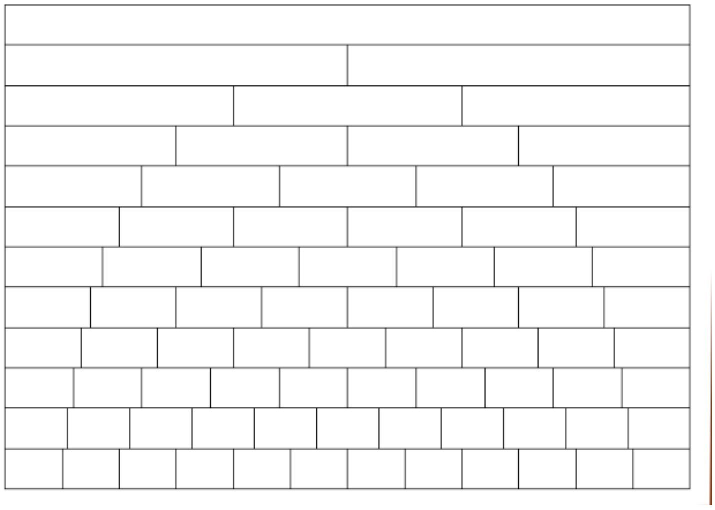
La primera fila representa la unidad: 1

La segunda fila representa las 2 mitades de la unidad. Cada casilla representa $\frac{1}{2}$

La tercera fila representa los 3 tercios de la unidad. Cada casilla representa $\frac{1}{3}$

La cuarta fila representa los 4 cuartos de la unidad. Cada casilla representa $\frac{1}{4}$

Y así sucesivamente hasta la última fila que representa las 12 doceavas partes de la unidad. Cada casilla representa $\frac{1}{12}$



Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

La suma o la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción en la que en el numerador está la suma o la resta de los numeradores de esas fracciones y en el denominador el mismo denominador que tenían.

SUMA

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{2+3}{8}=\frac{5}{8}$$

RESTA

$$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Paso a Paso:

1º Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores

Ejemplo 1: $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$ mcm(6,3)= 6

Ejemplo 2: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$ mcm(3,6,4)= 12

2º Cambiamos cada fracción por otra que sea equivalente y tenga como denominador el mínimo común múltiplo calculado anteriormente.

Ejemplo 1: $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{10}{12}-\frac{9}{12}$

3º Ahora calculamos las sumas y restas de fracciones con el mismo denominador.

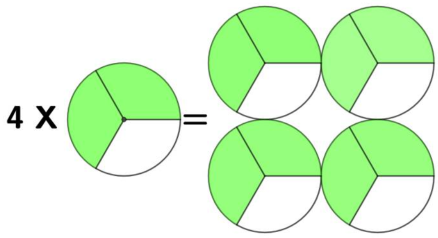
Ejemplo 1: $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{8+10-9}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Multiplicación de fracciones

Producto de un entero por una fracción

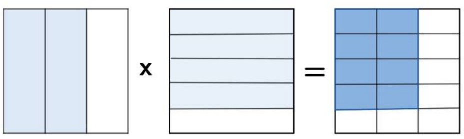
$4*\frac{2}{3}=\frac{4*2}{3}=\frac{8}{3}$ Gráficamente:



Producto de dos fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de sus numeradores y por denominador el producto de sus denominadores

$\frac{2}{3}*\frac{4}{5}=\frac{2*4}{3*5}=\frac{8}{15}$ Gráficamente:



División de fracciones

División de una fracción entre un entero

$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ Observa que: $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, es decir, dividir entre un número es multiplicar por su inverso.

División de dos fracciones

Teniendo en cuenta la observación anterior: $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} * \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

La división de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y por denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Introduciendo los decimales

Definiciones

1. **Número decimal:** Número que consta de una parte entera y una decimal, separadas por un punto o por una coma.
2. **Décima**: Cada parte de las diez en que se dividen ciertas medidas.
3. **Centésima:** Cada una de las 100 partes iguales en que se divide un todo.
4. **Milésima:** Una de las mil partes idénticas en las cuales se realiza la división de un todo.

Descomposición de la unidad

Décimas

Nos sirven para expresar una cantidad comprendida entre dos unidades.

Por ejemplo, tomamos una cantidad comprendida entre 5 y 6 unidades. Dividimos ese espacio en 10 partes iguales, que llamamos **décimas**.

Si queremos representar un número que sean 5 unidades y 5 décimas, lo denotamos con 5,5.

Centésimas

¿Y si continuamos dividiendo cada décima en diez partes iguales? Tendríamos que una unidad se divide en 100 partes que llamamos **centésimas**.

Podríamos, por ejemplo, tener el número decimal expresado por 5 unidades, 5 décimas y 6 centésimas: 5,56.

Milésimas

De la misma manera, si dividimos una centésima en 10 partes iguales, obtendríamos una **milésima**.

Por ejemplo, podríamos tomar 5 unidades, 5 décimas, 6 centésimas y 3 milésimas, que se correspondería con el número: 5,563.

Si continuamos dividiendo sucesivamente en 10 partes iguales obtendríamos las **diezmilésimas**, **cienmilésimas**, **millonésimas**, etc.

Orden y aproximación

Comparando decimales por las cifras

Una forma de realizar la comparación de números decimales es observando las cifras que lo componen:

Comparando primero la parte entera:

- ✔ *El que tenga la parte entera más grande , será el mayor*

Ejemplos: **7**,3 > **4**,2 ; **7**,125 > **4**,987 ; **0**,5 > **-2**,2 ; **0**,988 > **-2**,134

Y si la parte entera es la misma, se comparan los decimales:

- ✔ *Empezaremos comparando las décimas*

Veámoslo con un ejemplo: 3,65 y 3,42

Su parte entera es idéntica (3 en ambos) $\Rightarrow$ Comparamos las décimas (3,6 y 3,4) $\Rightarrow$ Como 6 es mayor que 4 3,65 > 3,42

- ✔ *Después las centésimas, luego las milésimas, y así sucesivamente*

Tomemos un ejemplo sencillo: 2,643 y 2,678

Su parte entera y las décimas son iguales (2,6 y 2,6) $\Rightarrow$ Por tanto, comparamos las centésimas (2,64 y 2,67) $\Rightarrow$ Como 7 es mayor que 4 2,678 > 2,643.

Aproximación por redondeo, truncamiento y por exceso

Nos podemos encontrar con números con infinitas cifras decimales (como por ejemplo el famoso número π= 3,141592653589793…) o con un número finito pero cuyo manejo resulte complicado o en los que indicar tantas cifras resulte innecesario (ejemplo: ¿Tendría sentido decir que el precio por kg de los pimientos es de 2,4827475 €?).

En estos casos, es conveniente simplificarlos para reducir el número de cifras decimales, siempre procurando que su valor sea aproximado al número original.

Existen diversos procedimientos para realizar esta aproximación. ¡Veámoslos!

Redondeo

Se trata de dar un valor aproximado lo más cercano al número original.

Así pues, podemos redondear a la unidad (el objetivo será eliminar la parte decimal), a la décima (dejando sólo una cifra decimal), a la centésima (dejando dos cifras decimales),...

El procedimiento para todos estos casos es siempre el mismo:

1. Suprimimos todas las cifras que quedan a la derecha.
2. Observamos la primera cifra suprimida. Si es menor que cinco, dejamos el número como está, pero si es mayor o igual que cinco, sumamos uno a la cifra anterior.

Veamos un ejemplo: El precio por kg de los pimientos es 2,4827475 € y el de los tomates 1,85298 €. Aproximemos los precios:

	Precio/kg	Redondeo a la unidad	Redondeo a la décima	Redondeo a la centésima
Pimientos	**2,4827475€**	**2 €** (se aproxima a 2, ya que la parte decimal es 0,4)	**2,5 €** (se aproxima a 2,5, ya que la parte centesimal es 0,08, por lo que sumamos uno a la parte decimal)	**2,48 €** (se aproxima a 2,48, ya que la parte milesimal es 0,002)
Tomates	**1,85298€**	**2 €** (se aproxima a 2 ya que la parte decimal es 0,8 y, por tanto, tenemos que sumar uno a las unidades)	**1,9 €** (se aproxima a 1,9, ya que la parte decimal es 0,05, por lo que sumamos uno a la parte decimal)	**1,85 €** (se aproxima a 1,85, ya que la parte milesimal es 0,002)

Truncamiento

Identificamos primero la posición a la que queremos aproximar. Luego, en la técnica de aproximación por truncamiento (también conocida como "por defecto") simplemente quitaremos los decimales que nos sobran. Así pues, siempre nos quedaremos con resultados menores o iguales al valor original.

Tomando el ejemplo anterior, si truncamos:

	Precio/kg	Truncamiento a la unidad	Truncamiento a la décima	Truncamiento a la centésima
Pimientos	**2,4827475€**	**2 €**	**2,4 €**	**2,48 €**
Tomates	**1,85298€**	**1 €**	**1,8 €**	**1,85 €**

Por exceso

Identificamos primero la posición a la que queremos aproximar. En la técnica de aproximación por exceso quitamos los decimales que sobran y completamos hasta buscar el número inmediatamente mayor. Siempre nos quedaremos con resultados mayores o iguales al valor original.

Tomando otra vez el mismo ejemplo, si aproximamos por exceso:

	Precio/kg	Aproximación por exceso a la unidad	Aproximación por exceso a la décima	Aproximación por exceso a la centésima
Pimientos	**2,4827475€**	**3 €**	**2,5 €**	**2,49 €**
Tomates	**1,85298€**	**2 €**	**1,9 €**	**1,86 €**

Operaciones con decimales

Suma y resta de decimales

Para sumar o restar números decimales tenemos que sumar o restar unidades con unidades, décimas con décimas,... Por tanto, si indicamos esta operación en columna, debemos colocar las unidades encima de las unidades, las décimas encima de las décimas, las centésimas encima de las centésimas..., es decir, debemos situar las comas encima de las comas.

Colocación incorrecta

$$\begin{array}{r} 135,5 \\ 1,52 \\ +23,11 \\ \hline \end{array}$$

Colocación correcta

$$\begin{array}{r} 135,5 \\ 1,52 \\ +23,11 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicación de decimales

La multiplicación de números decimales se realiza de igual manera que la multiplicación de números enteros. Solamente debemos tener en cuenta que, en el producto final, colocaremos la coma dejando tantas cifras decimales como reúnan todos los factores.

$$\begin{array}{r} 5,5\,2 \\ \times\quad 3,5 \\ \hline 2\,7\,6\,0 \\ 1\,6\,5\,6 \\ \hline 1\,9,3\,2\,0 \end{array}$$

División de decimales

Para estudiar el procedimiento de división de números decimales diferenciaremos entre todos los casos que nos podemos encontrar:

Dividendo y divisor enteros

Podemos diferenciar dos grandes casos: que el dividendo sea mayor que el divisor, o viceversa. El procedimiento es como sigue:

División entre enteros con dividendo mayor que divisor

Cuando la división entre enteros no es exacta (esto es, el resto es distinto de cero), se puede continuar realizando la división obteniendo un cociente que es un número decimal. Véase un ejemplo para comprender el proceso.

Ejemplo:

Al realizar la división $60 \div 25$ tenemos un resto de 10 unidades. Entonces, se introduce la coma en el cociente para indicar que

$$\begin{array}{r|l} 60 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 2,4 \\ \hline 100 & \\ -100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

procedemos a trabajar con las décimas. Así pues, se deben transformar esas 10 unidades de resto en 100 décimas incorporando el cero. Hecho esto, estamos en condiciones de continuar con la división.

División entre enteros con divisor mayor que dividendo

Cuando el divisor es mayor que el dividendo se tiene que realizar una transformación. Veámoslo con un ejemplo para comprender el proceso.

<u>Ejemplo</u>

Si se quiere realizar la división $9 \div 15$ se realiza el siguiente proceso: se transforman las 9 unidades en 90 décimas y se introduce en el cociente un cero precedido de una coma para indicar que se pasan a dividir las décimas.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 15 \\ \downarrow & \downarrow \\ 90 & 15 \\ \hline -90 & 0,6 \\ \hline 0/ & \end{array}$$

El dividendo es un número decimal

Si el dividendo contiene decimales el procedimiento es semejante a la división entre números entero, solamente tendremos en cuenta que, al bajar la primera cifra decimal del dividendo, se tiene que poner la coma en el cociente.

<u>Ejemplo</u>

Al realizar la división $5,6 \div 2$, en el momento de bajar el 6 indicamos la coma en el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 5,6 & 2 \\ \hline -4\ \downarrow & 2,8 \\ \hline 1\ 6 & \\ -1\ 6 & \\ \hline 0/ & \end{array}$$

El divisor es un número decimal

El objetivo será "eliminar la coma del divisor". Para ello se debe multiplicar divisor y dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor. Después, se continúa con la división de números enteros.

<u>Ejemplo:</u> En este caso, para realizar la división $30 \div 0,04$, se observa que el divisor contiene 2 cifras decimales, por tanto, tenemos que multiplicar el dividendo y el divisor por 100.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 0,04 \\ \hline \downarrow \cdot 100 & \downarrow 2\ decimales \rightarrow \cdot 100 \\ 3000 & 4 \\ \hline -28 & 750 \\ \hline 200 & \\ -200 & \\ \hline 0/ & \end{array}$$

El dividendo y el divisor son números decimales

Nuestro objetivo será, de nuevo, "eliminar los decimales del divisor", por tanto, multiplicaremos dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el divisor. Luego nos podremos encontrar en el primer caso (división entre números enteros) o en el segundo caso (división en la que el dividendo sea un número decimal y el divisor un número entero). <u>Ejemplo:</u> Si realizamos la división $0,7 \div 0,04$

$$\begin{array}{r|l} 0,7 & 0,04 \\ \hline \downarrow \cdot 100 & \downarrow 2\ decimales \rightarrow \cdot 100 \\ 70 & 4 \\ \hline -4 & 17,5 \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0/ & \end{array}$$

Relacionando fracciones y decimales

Expresando fracciones como decimales

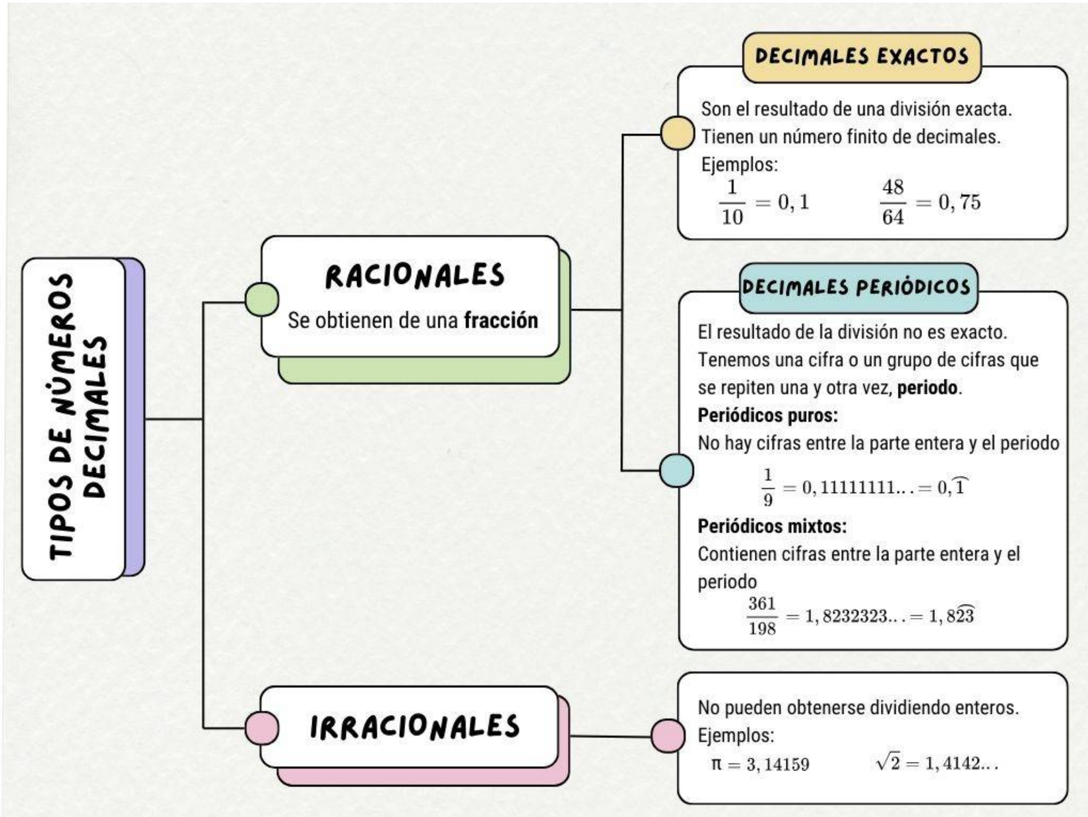
En la sección anterior hemos visto que una fracción se puede interpretar como una división.

Recordemos el ejemplo: Una botella de tres cuartos de litro se puede decir que es una botella de 0,75 litros. $\frac{3}{4} = 0{,}75\,L = 75\,cl$ (si realizamos la división 3 : 4 = 0,75)

Es decir, **el valor de una fracción se puede expresar como un número decimal.** Bastaría con realizar la división del numerador entre el denominador, ¡y la división ya la tenemos controlada! ¿Cómo pueden ser eses decimales resultantes? ¡Veámoslos!

Tipos de números decimales

Para ver cómo expresar una fracción como un decimal, y viceversa, necesitamos saber qué tipos de números decimales existen:



Expresando decimales como fracciones: Decimal exacto a fracción

Del mismo modo, podremos expresar un decimal racional (exacto o periódico) como una fracción, que llamaremos **fracción generatriz**.

En este curso nos centraremos en ver cómo **transformar un número decimal exacto en una fracción:**

El proceso es muy sencillo, puesto que podemos transformarlo como una división entre 10, 100, 1000..., siempre fijándonos en la cantidad de cifras decimales que contiene el número. Veámoslo con tres sencillos ejemplos:

$0{,}9=\frac{9}{10}$ (Una sola cifra decimal -> transformamos en una división entre 10)

$0{,}37=\frac{37}{100}$ (Dos cifras decimales -> transformamos en una división entre 100)

$1{,}369=\frac{1369}{1000}$ (Tres cifras decimales -> transformamos en una división entre 1000)

Un decimal se puede expresar con distintas fracciones, siempre que estas sean equivalentes.

Ejemplo: $1{,}25=\frac{125}{100}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}\rightarrow \textit{Fracción irreducible}$

En este caso lo que hemos hecho es simplificar la fracción de partida. Para simplificar fracciones recuerda que debemos dividir numerador y denominador por el mismo número. En este caso dividimos primero por 5 y luego de nuevo por 5, hasta llegar a una fracción que no podemos simplificar, es decir, llegamos a una fracción irreducible.

Por esta razón, siempre que nos pidan calcular **la fracción generatriz de un número decimal, debemos expresarla a través de su fracción irreducible,** ¡así que no te olvides de simplificar!