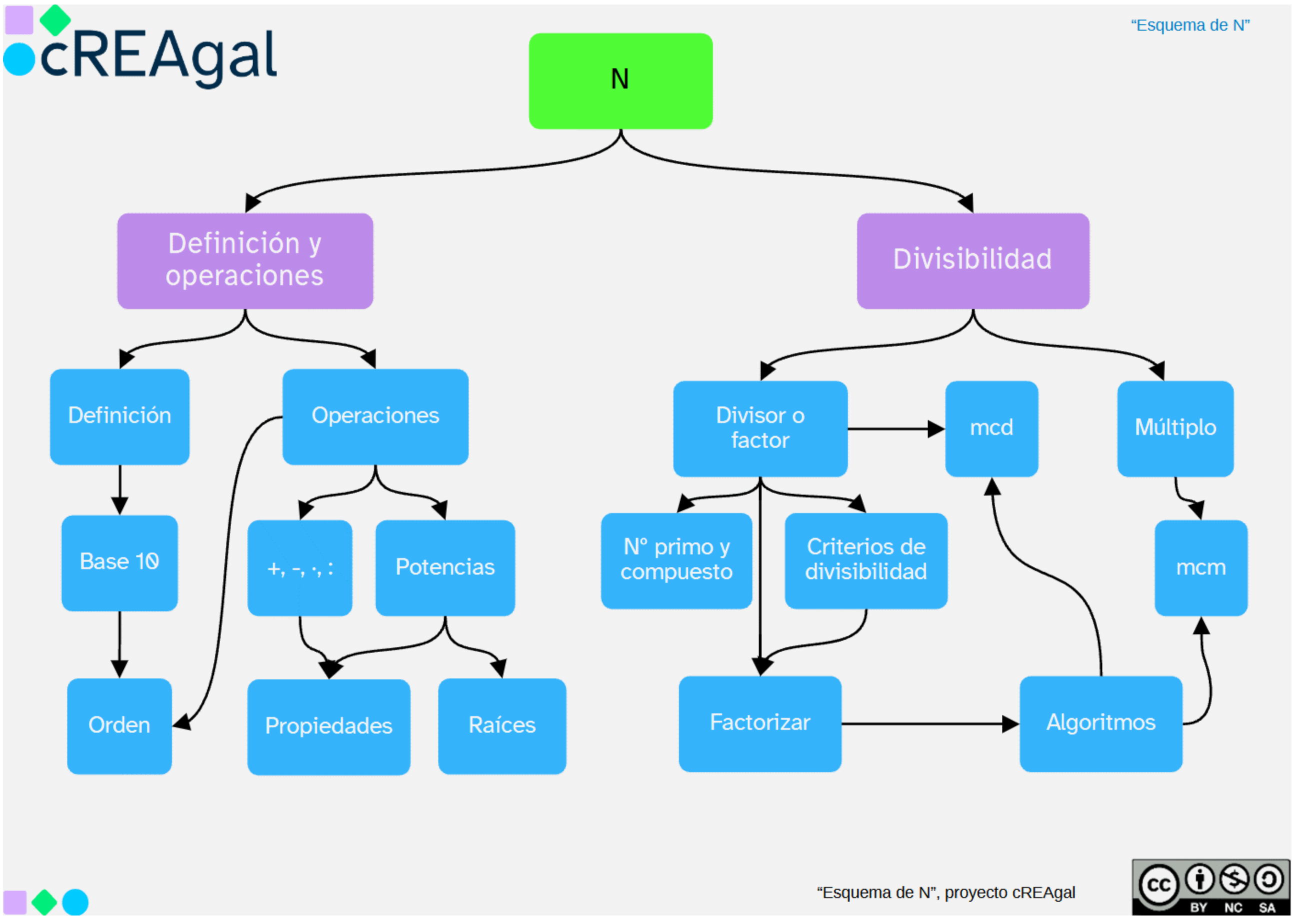
Sumario



"Esquema de N"
cREAgal
N
Definición y operaciones
Divisibilidad
Definición
Operaciones
Divisor o factor
mcd
Múltiplo
Base 10
+, −, ·, :
Potencias
Nº primo y compuesto
Criterios de divisibilidad
mcm
Orden
Propiedades
Raíces
Factorizar
Algoritmos
"Esquema de N", proyecto cREAgal

Fisgando en N

2. Entrada natural

Es natural

El **conjunto de los números naturales** está formado por todos los números que se utilizan para contar, incluyendo el cero: $\mathbb{N}$= **{0, 1, 2, 3, … }**

Los números naturales pueden utilizarse para representar una **cantidad**, para **ordenar** o como una **clave** o **identificador**.

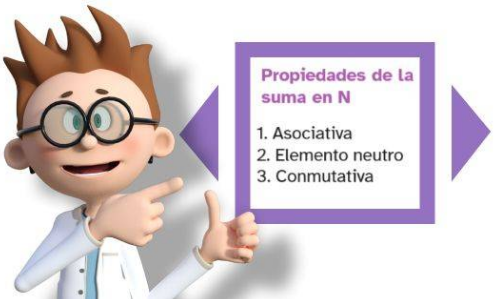
Código N

Un sistema de numeración es un **código** que permite identificar cantidades mediante números. Habitualmente usamos el sistema arábigo, aunque a veces utilizamos el sistema romano.

Suma en N

La suma o adición de números naturales tiene las propiedades siguientes:

- **Asociativa**: para sumar tres números podemos sumar dos de ellos cualesquiera y después el tercero.



- **Conmutativa**: sumar dos naturales cambiando el orden no varía el resultado.
- **Elemento neutro**: existe un número natural (el cero) que sumado con cualquier otro no altera su valor.

Multiplicación en N

La multiplicación o producto de números naturales tiene las propiedades siguientes:

- **Asociativa**: para multiplicar tres números podemos multiplicar primero dos de ellos cualesquiera y después el tercero.

- **Conmutativa**: multiplicar dos naturales cambiando el orden no varía el resultado.
- **Elemento neutro**: existe un número natural (el uno) que multiplicado por cualquier otro no altera su valor.
- **Distributiva**: para multiplicar un número natural por una suma podemos multiplicar el primero por cada elemento de la suma y sumar los resultados.

cREAgal

Contar es natural

Nuestro sistema **decimal** recibe este nombre porque tiene 10 dígitos:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Otros sistemas

Existen otros sistemas de numeración que también utilizamos en nuestro día a día que no tienen base 10. El sistema de numeración que usamos para contar las horas tiene base 12 y el que utilizamos para minutos y segundos es de base 60 (sexagesimal). El sistema en base 2, llamado binario, es el que se usa en informática.

Operaciones encadenadas

Además de la suma, existen otras operaciones entre números naturales, como por ejemplo la resta o la división. El resultado de estas operaciones entre números naturales puede no ser un número natural.

En la resta la propiedad conmutativa no se cumple, aunque si que sigue verificando que el elemento neutro es el cero.

La división tampoco tiene la propiedad conmutativa, pero comparte elemento neutro con la multiplicación, el uno.

Cuestión de orden

Los números naturales están ordenados. Un número será más pequeño que otro si se encuentra a su izquierda en la recta numérica.

Desenlace natural

Las cifras que conforman un número natural tienen un valor determinado dependiendo de la posición que ocupen.

Podemos descomponer un número natural usando sus cifras como en el ejemplo siguiente:

$$215 = \mathbf{2} \cdot 100 + \mathbf{1} \cdot 10 + \mathbf{5}$$

A esta descomposición se le llama **descomposición polinómica** de un número natural.

Cálculos encadenados

Para resolver problemas en los que haya que realizar varias operaciones es necesario tener claro el orden en el que se realizan.

Los cálculos encadenados deben seguir un orden secuencial, como los eslabones de la cadena, uno tras otro.

Este orden sólo se puede cambiar usando paréntesis y otros símbolos.

Operaciones con la misma jerarquía

- **Cadena de sumas y restas:** Si hay varias sumas y restas se hacen en el orden en el que estén escritas de izquierda a derecha. Ejemplo:

$$7 - 6 + 2 = 1 + 2 = 3$$

- **Cadena de multiplicaciones y divisiones:** Si hay varias multiplicaciones y divisiones se hacen en el orden en el que estén escritas de izquierda a derecha. Ejemplo:

$$20 : 4 \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$$

Operaciones con distinta jerarquía

El orden de preferencia es:

1. Productos y divisiones.
2. Sumas y restas.

Ejemplo: $7 + 3 \cdot 2 = 7 + 6 = 13$

Si quieres cambiar el orden tienes que utilizar paréntesis.

Ejemplo: $(7 + 3) \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$

2.3. Miríada de miríadas

Más números que arenas

Utilizamos las potencias para expresar números muy grandes usando un espacio reducido.

Qué es una potencia

Una potencia es una operación matemática que representa el producto de un número por sí mismo varias veces.

- El número que se multiplica por sí mismo se llama **base**.
- El número que indica la cantidad de veces que se multiplica se llama **exponente.**

Ejemplo: En la potencia 2^4 el 2 sería la base y el 4 el exponente y el resultado sería multiplicar el 2 por sí mismo 4 veces, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Raro... ¿y el símbolo?

En las potencias base y exponente no tienen el mismo tamaño. El exponente se escribe encima de la base y es más pequeño. 2^4 se lee 2 elevado a 4.

Otra forma de escribir una potencia es usando el símbolo “^”, por ejemplo: 2^4 = 2^4.

Las potencias en las que el exponente es 2 o 3 se leen distinto, por ejemplo 5^2 se lee 5 al cuadrado y 5^3 se lee 5 al cubo.

3. Rumbo N

3.3. Por las ramas

Operando con las ramas: propiedades

Propiedad 1

Al **multiplicar potencias de la misma base** el resultado es una potencia con la misma base y con exponente **la suma de los exponentes** de cada una de ellas.

La explicación puedes verla en este ejemplo:

$$3^{2} \cdot 3^{4} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{(2+4)} = 3^{6}$$

Propiedad 2

Al **dividir potencias de la misma base** el resultado es una potencia con la misma base y con exponente **la resta de los exponentes** de cada una de ellas.

La explicación puedes verla en este ejemplo:

$$3^{5} : 3^{2} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 3^{(5-2)} = 3^{3}$$

Consecuencias

El resultado de elevar un número a 0 es 1: $a^{0} = 1$ y el resultado de elevar un número a 1 es el mismo número: $a^{1} = a$.

Propiedad 3

Al **elevar** una potencia a otra potencia el resultado es una potencia con la misma base y de exponente el **producto de los exponentes**. Ejemplo:

$$(3^{4})^{2} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^{2} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{(4 \cdot 2)} = 3^{8}$$

Aún más propiedades

Propiedad 4

Elevar un producto a una potencia es igual que elevar cada uno de los factores a esa potencia y hacer después el producto. Ejemplo:

$$(6 \cdot 3)^{2} = 6^{2} \cdot 3^{2} = 36 \cdot 9 = 324$$

$$(6 \cdot 3)^{2} = 18^{2} = 324$$

Propiedad 5

Elevar un cociente a una potencia es igual que elevar dividendo y divisor a esa potencia y hacer después el cociente. Ejemplo:

$$(6 : 3)^{2} = 6^{2} : 3^{2} = 36 : 9 = 4$$

$$(6 : 3)^{2} = 2^{2} = 4$$

La **propiedad 4** también es válida cuando hay más de dos factores. Ejemplo:

$$(6 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 6^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

Las propiedades 4 y 5 también funcionan en sentido contrario, es decir:

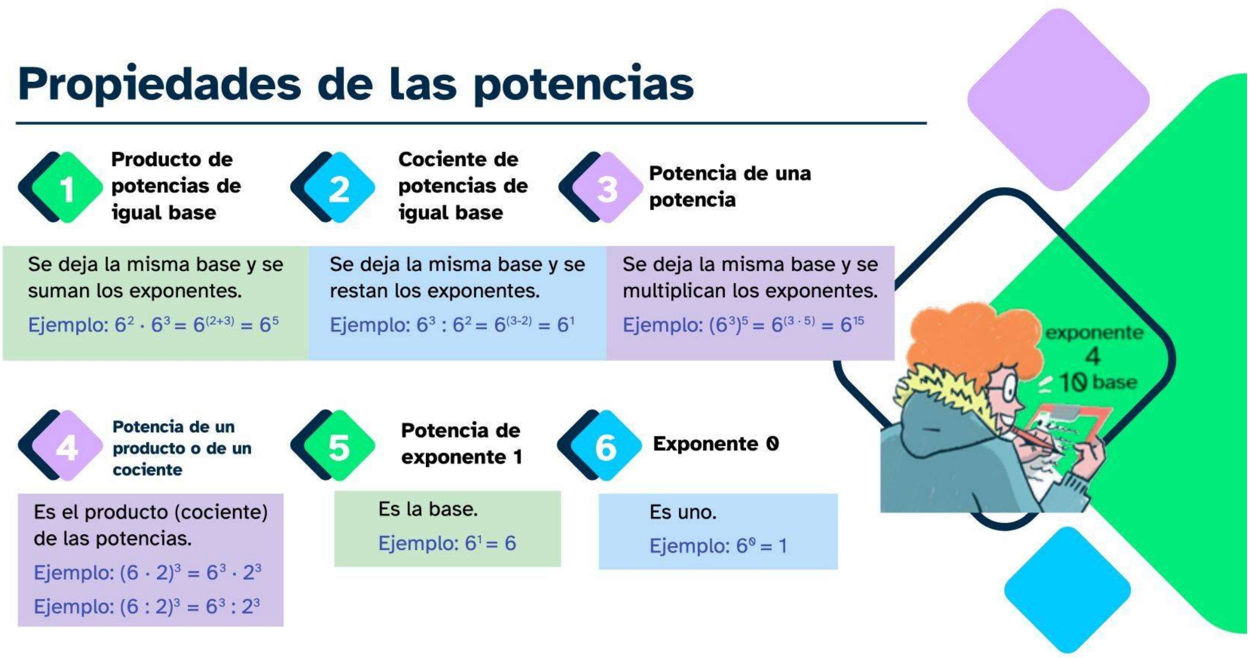
- el **producto de potencias con en mismo exponente** es una potencia con el mismo exponente y de base el producto de las bases
- el **cociente de potencias con el mismo exponente** es otra potencia con el mismo exponente y de base el cociente de las bases.

Ejemplos:

$$6^5 \cdot 3^5 = (6 \cdot 3)^5$$

$$6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5$$

En el siguiente esquema aparecen resumidas las principales propiedades de las potencias:



3.4. Barcos de raíz gallega

Cuadrando la pesca: la gamela y la tarrafa

Apóyate en la raíz

Un **cuadrado perfecto** es un número que se obtienen al elevar al cuadrado otro número.

Recibe este nombre porque si lo dibujamos punto a punto se puede formar un cuadrado.

Al **lado** de este cuadrado se le llama **raíz cuadrada** exacta de este número.

$$8^2 = 64 \Leftrightarrow \sqrt{64} = 8$$

Por tanto, b es la raíz cuadrada exacta del número a, y escribimos $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$.

¿Y si no cuadra?, el arrastrero (ampliación)

La raíz cuadrada entera

Si el resultado de la raíz no es exacto hablamos de **raíz entera** y le añadimos un **resto**, como en la división.

b es la raíz cuadrada entera del número natural a si podemos escribir que $a = b^2 + r$.

r es el resto de la raíz.

Se puede acotar su valor indicando entre qué dos cuadrados perfectos está el número.

Por ejemplo: $11 < \sqrt{136} < 12$.

De la lonja al mercado: cubicando (ampliación)

Radicando

De la misma forma que se puede pensar en cuadrados, podemos pensar en cubos.

b es la raíz cúbica de a si: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

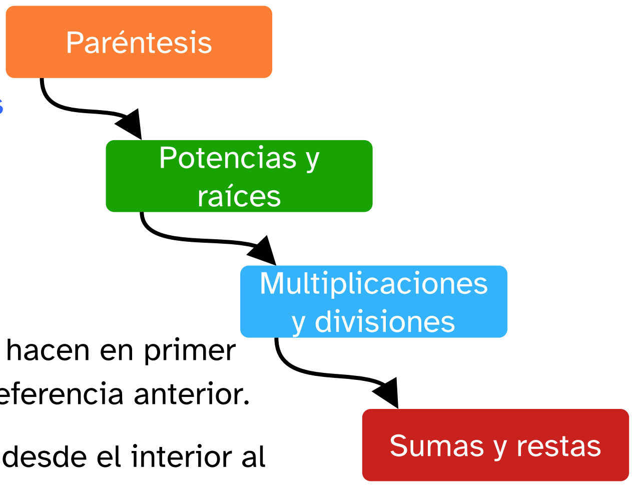
Ejemplo: la raíz cúbica de 8 es 2 porque 2 al cubo es 8: $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

3.4. Babor y estribor

Oriéntate para operar

En las ocasiones en las que debes resolver varias operaciones encadenadas, **la preferencia es por orden de dificultad**:

- **1° potencias y raíces**
- **2° multiplicaciones y divisiones**
- **3° sumas y restas**



¿Qué puede alterar el orden?

Los paréntesis: "señalizan" los cálculos que se hacen en primer lugar, y dentro de ellos también se guarda la preferencia anterior.

Si hay varios paréntesis se resuelven anidados, desde el interior al exterior.

¿Y si tengo varios cálculos de igual preferencia?

Se realizan en el orden en el que están escritos.

3.6. La derrota

Desgranando factores

El factor clave

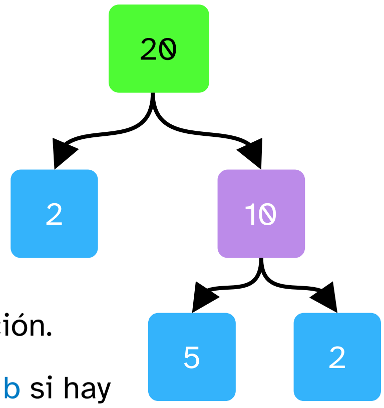
Factorizar un número es escribirlo como producto de dos o más cantidades.

Las factorizaciones de 20 son:

$20 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 4 = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20 \cdot 1$

En el esquema puedes ver cómo factorizar en forma de árbol.

Consiste en ir descomponiendo en producto de dos factores hasta llegar a un número primo.



Factor o divisor

El concepto de divisor y el de factor cumplen la misma condición.

- Decimos que un número a es **divisor** de otro número b si hay un número c que cumple $b = a \cdot c$
- Obviamente, c también es un divisor de b.
- Para escribirlo de forma abreviada utilizamos una raya vertical, $a|b$

Ejemplo: diez es divisor de veinte, podemos escribirlo como $10|20$

También puedes decir que 10 divide a 20.

Primos y compuestos

Un número primo es aquel que sólo tiene **dos** divisores: el 1 y el propio número.

Un número compuesto es el que tiene **más de dos** divisores. Esto quiere decir que puede expresarse de varias formas como producto de factores distintos.

El número 1 no se considera ni primo ni compuesto, pues solamente tiene **un** divisor.

Factoría de primos

Descomponer un número en factores primos consiste en expresarlo como una multiplicación de números primos.

Un método es la **factorización en forma de árbol** que expusimos antes.

La factorización prima es importante porque es única para cada número.

Ejemplo: la factorización prima de 20 es

$20 = 2^2 \cdot 5.$

Definiciones de divisibilidad

Múltiplo

Un número a es múltiplo de otro número b si es el resultado de multiplicar b por otro número c.

$a = b \cdot c$, a es múltiplo de b y c simultáneamente.

Ejemplo:

20 es múltiplo de 10 porque $20 = 10 \cdot 2$. 20 también es múltiplo de 2.

Relación entre divisor y múltiplo

Si a es múltiplo de b entonces b es divisor de a y viceversa.

Ejemplo: el 10 es múltiplo de 2, o lo que es lo mismo, 2 es un divisor de 10.

3.7. Acuicultura

Cálculos con criterio

Criterios de divisibilidad		Ejemplos
2	Si acaba en cifra par	116 acaba en cifra par
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3	138 1+3+8 = 12 es múltiplo de 3
4	El número que forma las dos últimas cifras es múltiplo de 4.	432 32 es múltiplo de 4
5	Si acaba en 0 ó 5	465 acaba en 5
6	Si es divisible entre 2 y entre 3	132 acaba en cifra par 1+3+2=6 es múltiplo de 3
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9	207 2+0+7 =9 es múltiplo de 9
10	Si acaba en 0	110 acaba en 0
11	Si agrupando sus cifras de dos en dos desde las unidades, su suma da múltiplo de 11.	27 830 2+78+30 = 110 es múltiplo de 11
	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar menos la suma de las cifras de lugar par es cero o múltiplo de once.	27 830 2+8+0 = 10 7+3 = 10 10 - 10 = 0

Artes manuales

Para hallar divisores de un número mentalmente se pueden utilizar las propiedades de la divisibilidad.

Una de ellas dice que si dos números dividen a otro, su producto también lo divide, y viceversa, si un producto lo divide también lo hacen sus factores:

- si a|c y b|c entonces a·b|c
- y viceversa, si a·b|c entonces a|c y b|c

Por ejemplo: 3|60 y 2|60 por tanto 6|60 y viceversa, como 6|60 entonces 3|60 y 2|60.

Por lo tanto, conociendo los criterios de 2, 3 y 5, y esta propiedad puedes obtener los de 4, 6, 9, y otros números compuestos como el 8, 12, 15...

3.8. Embarcando

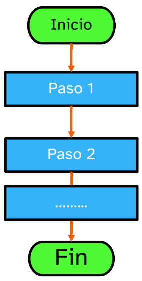
Comparando ciclos: mcm

Llamamos mínimo común múltiplo de dos o más números al menor de sus múltiplos comunes.

3.9. Guíame

El arte de calcular el mínimo común múltiplo

1. Partiendo de la definición



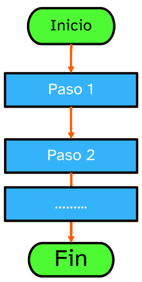
Este algoritmo se basa en la definición de mínimo común múltiplo de dos o más números como el menor de todos sus múltiplos comunes.

Por lo tanto podemos calcularlo siguiendo estos pasos:

- Paso 1: hacemos una lista con los múltiplos de cada número.
- Paso 2: buscamos la primera coincidencia entre los listados anteriores.

2. Factorizando

Este algoritmo se basa en que **cualquier múltiplo común a dos o más números debe estar formado por todos los factores de cada uno de esos números**.



Los pasos en este caso serían:

- Paso 1: hallamos la factorización prima de cada uno de los números.
- Paso 2: calculamos el mcm eligiendo sólo los factores primos necesarios para que en el resultado estén ambos números.

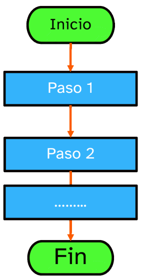
Ejemplo: Calcular el mcm (20, 8)

- Paso 1: factorización prima de ambos números, 20 = $2^2 \cdot 5$ y 8 = 2^3.
- Paso 2: los factores que aparecen en las descomposiciones son el 2 y el 5, por lo tanto ambos deben estar en el mcm. Como el dos aparece dos veces en la descomposición de 20 y tres en la de 8, deberá aparecer 3 veces en el mcm. Por lo tanto el mcm (20, 8) = $2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

Observa que en el producto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ están los factores del 20 (5, 2, 2) y del 8 (2, 2, 2).

Encadena mcm

El cálculo del mcm de más de dos números se puede hacer por los métodos del apartado anterior o bien agrupándolos de dos en dos y haciendo el mcm del resultado.



Para calcular el mcm (a, b, c) podemos seguir los pasos siguientes:

- Paso 1: calculamos el mcm (a, b) = d
- Paso 2: calculamos el mcm (b, c) = e
- Paso 3: calculamos el mcm (d, e) = **f**

El resultado del mcm (a, b, c) es **f**.

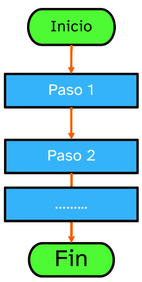
3.11. Harinas de Galicia

Empaquetando la molienda

Llamamos máximo común divisor de dos o más números al mayor de todos sus divisores comunes.

El arte de calcular el máximo común divisor

1. Por definición



Este algoritmo se basa en la definición de máximo común divisor de dos o más números, como el mayor de todos sus divisores comunes.

Podemos calcularlo siguiendo los pasos:

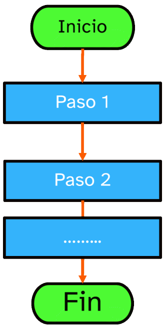
- Paso 1: hacemos una lista con los divisores de cada número de mayor a menor.
- Paso 2: buscamos la primera coincidencia entre los listados anteriores, es decir, el mayor divisor común.

2. Factorizando

Este algoritmo se basa en que **cualquier divisor de un número se forma multiplicando sus divisores (factores).**

Por tanto, el divisor común deberá tener los factores que están en ambos números.

Ejemplo: Calcular el mcd (50, 30)

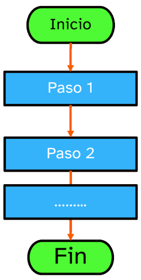


- Paso 1: factorización prima de ambos números, $50 = 5^2 \cdot 2$ y $30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$.
- Paso 2: los factores que aparecen en las dos descomposiciones son el 2 y el 5, por lo que serán los que formen el mcd. Como el 5 aparece dos veces en la descomposición del 50 y una en la de 30, deberá aparecer una vez en el mcd, pues si lo ponemos 2 no sería divisor de 30.
- Paso 3: multiplicamos esos factores y obtenemos el máximo común divisor. El mcd $(50, 30) = 5 \cdot 2 = 10$.

Euclides nos ayuda con el mcd

El algoritmo de Euclides permite calcular el mcd de dos números encadenando divisiones.

Veámoslo calculando el mcd (50, 30). Seguimos los pasos siguientes:



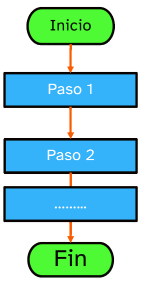
- Paso 1: dividimos 50 : 30 el cociente es 1 y el resto es 20, como la división no es exacta volvemos a dividir el divisor entre el resto.
- Paso 2: dividimos 30 : 20 el cociente es 1 y el resto es 10, como la división no es exacta dividimos el divisor entre el resto.
- Paso 3: dividimos 20 : 10 el cociente es 2 y el resto es 0

Al llegar a la división exacta el último divisor es el número que buscamos.

El resultado del mcd (50, 30) es 10.

Conocido el máximo común divisor de dos números, podemos calcular el mínimo común múltiplo utilizando la siguiente propiedad: **mcd (a,b) · mcm (a,b) = a · b**

¡Cómo raya!



El mcd y el mcm

El máximo común divisor de dos cantidades se halla multiplicando **todos los factores primos comunes elevados al menor exponente.**

El mínimo común múltiplo de dos cantidades se halla multiplicando **todos los factores primos, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.**

Halla el mcd y el mcm de 40 y 60:

$40 = 2^3 \cdot 5$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$ $\quad \Rightarrow$ $\quad$ Así, el mcd $(40, 60) = 2^2 \cdot 5 = 20$

$40 = 2^3 \cdot 5$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$ $\quad \Rightarrow$ $\quad$ Así, el mcm $(40, 60) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 = 120$